МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

О.С. АРХІПОВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів напряму підготовки 6.050702− «Електромеханіка»

ХАРКІВ − ХНАМГ − 2008

УДК 517.2+517.51

Вища математика: Навчальний посібник (для студентів напряму підготовки 6.050702− «Електромеханіка»). – Харків: ХНАМГ, 2008. – 282 с.

Автор: **О.С. Архіпова**

Гриф надано Міністерством освіти і науки України, лист № 1.4/18-Г-2193 від 10.12.07

Навчальний посібник містить теоретичні відомості з основних розділів вищої математики: лінійної алгебри та аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення, функції багатьох змінних, звичайних диференціальних рівнянь, числових та функціональних рядів.

Конспект лекцій складено за діючою програмою з курсу вищої математики для студентів напряму підготовки 6.050702− «Електромеханіка»

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, професор А.І. Колосов (ХНАМГ)

д-р фіз.-мат. наук, професор М.В. Новожилова (ХДТУБА)

Рис. 113 Бібл. 34

ISBN 966-695-091-X

ПЕРЕДМОВА

У посібнику викладені теоретичні відомості з відповідних розділів, систематизовані методи розв'язання практичних задач, що дає змогу студентам досягти навиків в розв'язанні задач з основних розділів вищої математики.

Особливу увагу приділено темам, які важче засвоюються студентами: диференціальні рівняння, кратні та криволінійні інтеграли, числові і функціональні ряди.

Посібник може бути також використаний студентами інших спеціальностей і викладачами для контролю засвоєння матеріалу за основними розділами вищої математики.

РОЗДІЛ 1

МАТРИЧНА АЛГЕБРА, ВИЗНАЧНИКИ, СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Матриці й дії над ними

1.1.1. Матриці та їх класифікація

Систему m чисел, записаних у вигляді прямокутної таблиці, що містить m рядків й n стовпців, називають матрицею розмірності (розміру) m на n. Числа, з яких складена матриця, називаються її елементами. Матриці звичайно позначаються великими буквами *A, B, C,…*, а їхні елементи – малими: $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \ldots$. Перший індекс елемента матриці вказує номер рядка, у якому знаходиться даний елемент, другий індекс – номер стовпця. Так, елемент a_{ij} розташований на перетині *i-й* рядка й *j-го* стовпця матриці *A*. Матриця *A* розмірності m на n записується так:

$$A = A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Такий запис матриці *A* називається розгорненим.

Скорочені форми запису:

$$A = \left(a_{ij}\right); \;\; A = \left[a_{ij}\right]; \;\; A_{mn} = \left(a_{ij}\right)_{mn}; \;\; A_{mn} = \left[a_{ij}\right]_{mn}.$$

Якщо в матриці A_{mn} число рядків не дорівнює числу стовпців, тобто $m \neq n$, то матрицю *A* називають прямокутною; якщо ж $m = n$ – квадратною матрицею *n-го* порядку.

Матриця, що складається з одного рядка (стовпця) називається матрицею-рядком (матрицею-стовпцем) або вектором-рядком (вектором-стовпцем).

Якщо всі елементи матриці *A* дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$ для всіх $i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n}$, то матриця називається нульовою.

Елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратної матриці *n-го* порядку називаються діагональними, а вся їхня сукупність – головною діагоналлю або просто діагоналлю матриці *A*.

Квадратна матриця, всі недіагональні елементи якої дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$ для всіх $i \neq j$, називається діагональною.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Діагональна матриця, у якої $a_{ii}=1, \left(\forall\ i=\overline{1,n}\right)$, називається одиничною матрицею порядку *n*. Одиничні матриці позначаються через *E* або *I*.

Якщо всі елементи матриці, розташовані вище (нижче) головної діагоналі дорівнюють нулю, то матриця називається трикутною(нижньотрикутною або верхньотрикутною). Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$ – верхньотрикутна матриця.

Матриця, отримана з матриці *A*, заміною рядків стовпцями зі збереженням їхнього порядку, називається транспонованою стосовно матриці *A* матрицею й позначається A^T *или* A' .

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Наприклад, $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 8 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

1.1.2. Дії над матрицями

1) Матриці А и В називають рівними й пишуть $A=B$, якщо:
   а) ці матриці однієї розмірності: $A=A_{mn},\ B=B_{mn}$;
   б) $a_{ij}=b_{ij}$ для всіх $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

2) Для матриць однакової розмірності визначена операція (дія) алгебраїчного додавання: $A=A_{mn}=\left(a_{ij}\right)_{mn},\ B=B_{mn}=\left(b_{ij}\right)_{mn}$;

$A\pm B=A_{mn}\pm B_{mn}=\left(a_{ij}\pm b_{ij}\right)_{mn},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ – сума або різниця матриць.

3) Добутком матриці *A* на число *a* або числа *a* на матрицю *A* називають матрицю, елементи якої одержують множенням всіх елементів матриці *A* на число *a:*

$A\cdot a=a\cdot A=\left(a\cdot a_{ij}\right),\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$.

4) Якщо число стовпців матриці $A = A_{mk}$ дорівнює числу рядків матриці $B = B_{kn}$, то тоді (і тільки тоді!) визначається добуток матриці A_{mk} на матрицю B_{kn}:

$A_{mk} \cdot B_{kn} = C_{mn} = \left(c_{ij}\right)_{mn}$.

Елемент c_{ij} матриці $C = AB$ обчислюється як скалярний добуток *i-й* рядка матриці *A* на *j-й* стовпець матриці *B*:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj}, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

Якщо *A* і *B* – квадратні матриці одного порядку, то в цьому випадку мають сенс добутки *AB* і *BA*. Необхідно пам'ятати, що в загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо ж $AB = BA$, то такі квадратні матриці називають переставними або комутативними.

Для операцій додавання, множення матриць на число й множення матриць справедливі наступні властивості:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
5. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
6. $(AB)C = A(BC)$;
7. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$;
8. $(A + B)C = AC + BC$;
9. $C(A + B) = CA + CB$
10. $AE = EA = A$;

Приклад 1. Обчислити матрицю $D = 3A - 4B$,

якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

$3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 21 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, $4B = \begin{pmatrix} -4 & 36 & 0 \\ 8 & 16 & -32 \end{pmatrix}$

$D = 3A - 4B = \begin{pmatrix} 10 & -33 & -9 \\ 13 & -16 & 44 \end{pmatrix}$

Приклад 2.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{2,3}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3,2}$

Число стовпців матриці *A* дорівнює числу рядків матриці *B*.

$D = AB = \left(d_{ij}\right)_{2,2.}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.2. Визначники і їх властивості

Визначником n-го порядку називається число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[i_1, i_2, \dots, i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n},$$

де підсумовування поширюється на всілякі перестановки $i_1, i_2, \dots, i_n$ із n чисел $1, 2, \dots, n$; $[i_1, i_2, \dots, i_n]$ – число інверсій у перестановці перших індексів $i_1, i_2, \dots, i_n$.

З означення визначника виходить, що визначник другого порядку дорівнює числу: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Визначник третього порядку дорівнює:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1(-5)(-1) + 3 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-5) \cdot 1 - 7 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) = 33$.

Означення. *Мінором (M_{ij}) елемента a_{ij} називається визначник порядку n-1, отриманий з визначника n-го порядку викреслюванням рядка й стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.*

Означення. *Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – мінор елемента a_{ij}.*

Основні властивості визначників:

1. Визначник не зміниться при транспонуванні, тобто якщо його рядки й стовпці поміняти місцями.
2. При перестановці місцями будь-яких двох рядків (стовпців) визначник змінить знак на протилежний.
3. Загальний множник всіх елементів рядка (стовпця) виноситься за знак визначника.
4. Визначник, у якого два рядки (стовпця) пропорційні, дорівнює нулю.

Наслідки властивості 4:

a) визначник, у якого 2 рядка (2 стовпці) однакові, дорівнює нулю;

b) визначник дорівнює нулю, якщо рядок (стовпець) дорівнює нулю.

5. Якщо до елементів рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помноженого на будь-яке число, то визначник не зміниться.

6. Визначник дорівнює сумі добутків елементів рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення. При обчисленні визначників порядку вище третього користуються властивістю 5, попередньо одержуючи нулі в рядку або стовпці.

Наприклад, обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_2 - a_1 \cdot 1 \to a_2 \\ = a_3 + a_1 \cdot (-3) \to a_3 = \\ a_4 + a_1 \cdot (-1) \to a_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -7 & 10 & -12 \\ 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 10 & -12 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 12 \cdot (30 + 7 - 12 - 21) = 12 \cdot 4 = 48.$$

1.3. Обернена матриця. Ранг матриці

Квадратна матриця називається невиродженою, якщо її визначник не дорівнює нулю, інакше вона називається виродженою.

Означення. *Матриця* A^{-1} *називається оберненою стосовно матриці A, якщо*

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – *одинична матриця*; $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Квадратна матриця має обернену.

Обернена матриця знаходиться за формулою: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{21} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$,

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A;

$\det A$ – визначник матриці *A*.

Приклад 5. Знайти матрицю, обернену матриці: A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо визначник даної матриці: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0,$

виходить, обернена матриця існує.

Алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 7 & -1\end{vmatrix}=-16;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=9$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 7\end{vmatrix}=31;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 7 & -1\end{vmatrix}=9$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 7\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -5 & 3\end{vmatrix}=11;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=0;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-11.$$

Одержимо: $A^{-1}=\dfrac{1}{33}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$

Перевірка: $AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

Аналогічно, $A^{-1}A=E.$

1.3.1. Елементарні перетворення матриць

Елементарними перетвореннями матриць називаються:

1. перестановка місцями рядків (стовпців) матриці;
2. множення всіх елементів рядка (стовпця) на те саме число;
3. додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на те саме число;
4. відкидання рядків (стовпців), всі елементи яких дорівнюють нулю;

Матриці, отримані одна з іншої при елементарних перетвореннях, називаються еквівалентними.

1.3.2. Ранг матриці

Рангом (*r* або *rang*) матриці називають найвищий порядок її мінору, відмінного від нуля; під мінором *k-го* порядку матриці $A=(a_{ij})_{m;n}$ розуміють визначник, елементи якого стоять на перетині *k* рядків й *k* стовпців матриці.

Для ненульової матриці $1\le r\le \min(m;n)$.

Можна показати, що елементарні перетворення не змінюють ранг матриці.

За допомогою елементарних перетворень можна привести матрицю до канонічного виду, тобто до матриці, у якої на головній діагоналі стоять одиниці, а інші елементи матриці дорівнюють нулю.

Приклад 1. Обчислити ранг матриці: $A=\begin{pmatrix}2&5&-8&8\\4&3&-9&9\\2&3&-5&7\\1&8&-7&12\end{pmatrix}$

Розв'язання.
Поміняємо місцями перший й четвертий рядки:

$$A\sim\begin{pmatrix}1&8&-7&12\\4&3&-9&9\\2&3&-5&7\\2&5&-8&8\end{pmatrix}\sim\begin{matrix}a_1\cdot(-4)+a_2\to a_2\\a_1\cdot(-2)+a_3\to a_3\\a_1\cdot(-2)+a_4\to a_4\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&8&-7&12\\0&-29&19&-39\\0&-13&9&-17\\0&-11&6&-16\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{matrix}b_1\cdot(-8)+b_2\to b_2\\b_1\cdot(7)+b_3\to b_3\\b_1\cdot(-12)+b_4\to b_4\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-29&19&-39\\0&-13&9&-17\\0&-11&6&-16\end{pmatrix}\sim a_2+a_3\cdot(-2)\to a_2\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-3&1&-5\\0&-13&9&-17\\0&-11&6&-16\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim a_4\cdot(-1)+a_3\to a_3\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-3&1&-5\\0&-2&3&-1\\0&-11&6&-16\end{pmatrix}\sim\begin{matrix}a_2\cdot(-3)+a_4\to a_4\\a_2+a_3\cdot(-1)\to a_2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&-2&-4\\0&-2&3&-1\\0&-2&3&-1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{matrix}a_2\cdot(-1)\to a_2\\a_4+a_3\cdot(-1)\to a_4\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&4\\0&-2&3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&4\\0&-2&3&-1\end{pmatrix}\sim a_2\cdot 2+a_3\to a_3\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&4\\0&0&7&7\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{matrix}a_3\div 7\to a_3\\b_2\cdot(-2)+b_3\to b_3\\b_2\cdot(-4)+b_4\to b_4\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\sim b_3\cdot(-1)+b_4\to b_4\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Тому що визначник $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$, звідси випливає, що *rang(A)=3*, тобто число одиниць на головній діагоналі дорівнює рангу матриці.

1.4. Розв'язування систем лінійних рівнянь

1.4.1. Загальні поняття

Система n лінійних рівнянь із n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.4.)$$

2)

де $a_{ij}\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\right)$, b_i – коефіцієнти, x_i – невідомі.

Системи рівнянь називаються еквівалентними, якщо будь-який розв'язок однієї з них є розв'язком іншої.

Ввівши в розгляд матриці-стовпці $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$

систему рівнянь можна переписати в матричному виді $AX = B$.

Якщо $b_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ дорівнюють нулю, система називається *однорідною,* інакше система називається *неоднорідною*.

1.4. 2. Правило Крамера

Нехай $\det A = \Delta \neq 0$, тоді розв'язок системи рівнянь (1.4) має вигляд $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}\left(j = \overline{1,n}\right)$, де Δ_j – визначник, отриманий із визначника Δ системи заміною *j-го* стовпця при невідомому x_j стовпцем правих частин *B*.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з $\Delta_j \neq 0$, то система несумісна, тобто розв'язків не має.

Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0$, то система рівнянь або несумісна, або невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

Розв'язання.

Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33;$

знаходимо $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33;$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33;$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33;$

тоді $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1.$

1.4. 3. Розв'язування систем рівнянь матричним способом (за допомогою оберненої матриці)

Лінійна система рівнянь у матричному виді $AX = B$. Домножимо на A^{-1} матричне рівняння, одержимо розв'язок $X = A^{-1}B$.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь матричним способом (за допомогою оберненої матриці):

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

Розв'язання.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$

тоді система рівнянь прийме вид $AX = B$ й її розв'язок $X = A^{-1}B$.

Обернена матриця, обчислена раніше, дорівнює $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & \frac{-1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & \frac{-1}{11} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$, звідси:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & \frac{-1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & \frac{-1}{11} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

де
$$x = \frac{-16}{33} \cdot 4 + \frac{3}{11} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 8 = 1,$$
$$y = \frac{3}{11} \cdot 4 - \frac{1}{11} \cdot 1 + 0 \cdot 8 = 1,$$
$$z = \frac{31}{33} \cdot 4 - \frac{1}{11} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 8 = 1.$$

1.4.4. Системи *m* лінійних рівнянь із *n* невідомими

Теорема Кронекера - Капеллі.

Теорема 1. Для того щоб система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

була сумісною, необхідно й достатньо, щоб ранг розширеної матриці системи був рівний рангу її основної матриці, тобто $r\left(A_{розш}\right) = r\left(A\right)$. Тут

$$A_{\text{ðî çø.}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Системи лінійних однорідних рівнянь $\left(b_i = 0;\ i = \overline{1,m}\right)$**.**

Система лінійних однорідних рівнянь завжди сумісна, має очевидний нульовий (тривіальний) розв’язок $x_i = 0;\ i = \overline{1,n};\ r(A) = r\left(A_{розш}\right)$, оскільки додавання нульового стовпця не збільшує рангу матриці.

Теорема 2. *Для того, щоб однорідна система лінійних рівнянь мала ненульовий розв’язок, необхідно й достатньо, щоб ранг r матриці її коефіцієнтів був менше числа невідомих n.*

Наслідок. *Будь-яка система m лінійних однорідних рівнянь, число рівнянь у якій менше числа невідомих, має нетривіальний розв’язок.*

Теорема 3. *Для того, щоб однорідна система n рівнянь із n невідомими мала ненульовий розв’язок, необхідно й достатньо, щоб її визначник був рівний нулю.*

Означення. *Рядки e_1, e_2,…,e_m називаються лінійно залежними, якщо знайдуться такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, з яких хоча б одне не дорівнює нулю, що $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m = 0$, інакше рядки називаються лінійно незалежними.*

Теорема 4(про базисний мінор). *Якщо ранг матриці дорівнює r, то в цій матриці можна знайти r лінійно незалежних рядків, через які лінійно виражаються всі інші рядки. Зазначені r рядків називаються базисними.*

1.4.5. Правило розв’язування довільної системи *m* лінійних рівнянь із *n* невідомими

Загальним розв’язком системи лінійних рівнянь називається такий розв’язок, у якому базисні невідомі виражені через інші невідомі, які називаються вільними.

Частинним розв’язком називається розв’язок, отриманий із загального розв’язку при деяких числових значеннях вільних невідомих.

Базисним розв’язком називається частинний розв’язок, вільні невідомі якого дорівнюють нулю.

1. Обчислюючи ранги основної й розширеної матриці системи, з'ясовують питання про її сумісність. Якщо система сумісна, то знаходять який-небудь базисний мінор порядку *r*.
2. Береться *r* рівнянь, з коефіцієнтів яких складений базисний мінор; інші рівняння відкидають. Невідомі, коефіцієнти яких входять у базисний мінор, називають головними й залишають ліворуч, а інші *n*-*r* невідомих називають вільними й переносять у праві частини рівнянь.
3. За правилом Крамера знаходять вирази головних невідомих через вільні. Отримані рівності будуть загальним розв'язком системи.
4. Надаючи вільним невідомим будь-які числові значення, знаходять відповідні значення головних невідомих. Тим самим знаходять частинний розв'язок вихідної системи рівнянь.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання.

Досліджуємо систему на сумісність.

$$A_{розш.} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} a_2 + a_1 \cdot (-2) \to a_2 \\ a_3 + a_1 \cdot (-1) \to a_3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{matrix} a_3 + a_2 \cdot (-2) \to a_3 \\ a_2 \cdot (-1) \to a_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \end{array}\right).$$

Відкидання нульового рядка не міняє рангу матриці. Оскільки мінор

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = 55 - 56 = -1 \neq 0, \text{ тобто } r(A) = r(A_{розш.}), \text{ система сумісна.}$$

Оскільки перетворення відносилися тільки до рядків, система рівнянь рівносильна наступній системі:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ \qquad\qquad 8x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Це базисна система рівнянь. Знайдемо головні невідомі x_3 й x_4, виразивши їх через вільні невідомі x_1 й x_2.

$$\begin{cases} 5x_3 + 7x_4 = 1 - 2x_1 + 3x_2 \\ 8x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Застосуємо формули Крамера, що дає загальний розв'язок системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1-2x_1+3x_2 & 7 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = -22x_1+33x_2+11;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1-2x_1+3x_2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 16x_1-24x_2-8\ ;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 22x_1-33x_2-11; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -16x_1+24x_2+8,$$

де базисні x_3 й x_4 невідомі виражені через вільні змінні x_1 й x_2.

Отримано загальний розв'язок системи

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 22x_1-33x_2-11 \\ -16x_1+24x_2+8 \end{pmatrix}$$

Візьмемо частинний розв'язок, вважаючи $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, тоді $x_3 = -22$; $x_4 = 16$, тобто $X_r^T = (1; 1; -22; 16)$.

Перевіримо розв'язок, підставивши частинний розв'язок у вихідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2-3-22\cdot 5+7\cdot 16 = 1 \\ 4-6-22\cdot 2+3\cdot 16 = 2 \\ 2-3-11\cdot(-22)-15\cdot 16 = 1 \end{cases}$$

Всі рівняння системи перетворюються в тотожності. Розв'язок знайдено.

Контрольні завдання до розділу 1

Завдання 1. Обчислити визначники

1.1.1. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	1.1.2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	1.1.3. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
1.1.4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$	1.1.5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	1.1.6. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
1.1.7. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$	1.1.8. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	1.1.9. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
1.1.10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$	1.1.11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	1.1.12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

1.1.13. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	1.1.14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$	1.1.15. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
1.1.16. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	1.1.17. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$	1.1.18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
1.1.19. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	1.1.20. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	1.1.21. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & -4 & 3 \end{vmatrix}$
1.1.22. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & -4 \\ 2 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$	1.1.23. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$	1.1.24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}$
1.1.25. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	1.1.26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$	1.1.27. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
1.1.28. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	1.1.29. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 2 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	1.1.30. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

РОЗДІЛ 2

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1. Основні поняття

Багато фізичних величин (сила, швидкість, прискорення й ін.) характеризуються не тільки числовим значенням, але й напрямом. Такі величини називаються *векторними*.

Векторну величину геометрично зображують за допомогою відрізка певної довжини й певного напряму.

Вектором будемо називати *напрямлений відрізок* (рис. 2.1). Напрям вектора вказується стрілкою. Точка A називається *початком*, а точка B – *кінцем*. Вектори позначаються буквами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ...$, а також $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$,... (на першому місці ставиться початок вектора).

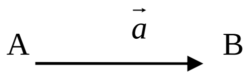


Рис. 2.1

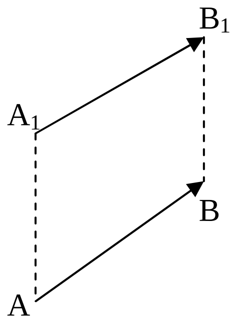


Рис. 2.2

Відстань між початком і кінцем вектора називається *довжиною* або *модулем* вектора. Довжина вектора $\vec{a}$ позначається $|\vec{a}|$.

Вектори, розташовані на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*.

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони збігаються при паралельному переносі. Паралельний перенос переводить початок і кінець одного вектора відповідно в початок і кінець іншого вектора, тобто $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 2.2).

Два вектори називаються *однаково напрямленими (протилежно напрямленими)*, якщо вони *колінеарні* й у рівних їм векторів, що мають загальний початок, кінці розташовуються по одну сторону від початку (відповідно по різні сторони від початку).

Рівні вектори однаково *напрямлені* й мають рівні довжини. І обернено, якщо вектори однаково *напрямлені* й мають рівні довжини, то вони рівні. Від будь-якої точки можна відкласти вектор, рівний даному, і притому тільки один.

До векторів будемо відносити й нульовий вектор, початок і кінець якого збігаються.

Нульовий вектор позначається $\vec{0}$. Його довжина дорівнює нулю. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору, тому що він не має певного напряму. Всі нульові вектори рівні.

2.2. Лінійні операції над векторами

Означення. *Сумою* вектора $\overrightarrow{AB}$ й вектора $\overrightarrow{BC}$ називається вектор $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Сумою вектора $\overrightarrow{AB}$ й довільного вектора $\overrightarrow{PQ}$ називається сума вектора $\overrightarrow{AB}$ й вектора $\overrightarrow{BC}$, рівного $\overrightarrow{PQ}$ (рис. 2.3) (правило трикутника).

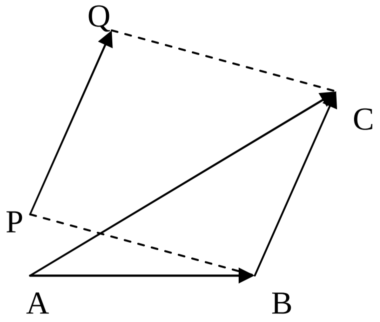


Рис. 2.3

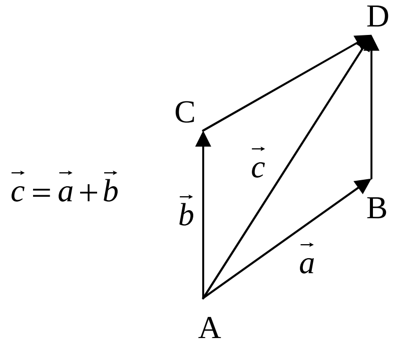


Рис. 2.4

За означенням для будь-якого вектора $\vec{a}$ й нульового вектора $\vec{0}$
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
Якщо $\vec{a} = \vec{a}_1$, $\vec{b} = \vec{b}_1$ то $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$. Це випливає з означення суми векторів і рівності векторів.

Властивості додавання векторів.

1) *Сполучна властивість:* $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

2) *Переставна властивість*: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Додавання двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна виконувати за правилом паралелограма: вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ відкладаються від однієї точки A (рис. 2.4) і будується паралелограм зі сторонами $\overrightarrow{AB}$ й $\overrightarrow{AC}$.Тоді $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$. .

Правило для побудови вектора суми: «з початку одного вектора в кінець іншого».

Вектором, *протилежним* вектору $\overrightarrow{AB}$, називається вектор $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. За означенням вектор, протилежний нульовому вектору, є нульовий вектор. Очевидно, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Різницею векторів $\vec{a}$ й $\vec{b}$ (позначається $\vec{a} - \vec{b}$) називається сума вектора $\vec{a}$ й вектора $-\vec{b}$, протилежного $\vec{b}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Кутом між ненульовими векторами $\overrightarrow{AB}$ й $\overrightarrow{AC}$ називається кут BAC. *Кутом між будь-якими двома векторами $\vec{a}$ й $\vec{b}$ називається кут між рівними їм векторами із загальним початком*. Кут між однаково напрямленими векторами вважається рівним нулю.

Таким чином, якщо φ – градусна міра кута між векторами $\vec{a}$ й $\vec{b}$, $0^0 \le \varphi \le 180^0$.

Означення. *Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ на дійсне число $\lambda \neq 0$ називається вектор, довжина якого дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$*

на модуль числа λ, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$ при λ > 0 і протилежно напряму $\vec{a}$ при λ < 0.

Добуток вектора $\vec{a}$ на число λ позначається $\lambda\vec{a}$ (числовий множник пишеться ліворуч). За означенням

$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| . |\vec{a}|$.

Якщо вектор $\vec{a}$ – нульовий або число λ дорівнює нулю, то покладають

$\lambda\cdot\vec{0} = \vec{0}$ для будь-якого числа λ,

$0\cdot\vec{a} = \vec{0}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.

Властивості множення вектора на число.

1) *Сполучна властивість: $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.*

2) Перша розподільна властивість: $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a} = (\lambda+\mu)\vec{a}$.

3) *Друга розподільна властивість: $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$.*

Теорема. *Ненульові вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли існує таке число λ, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.*

2.3. Координати вектора

Вектор, довжина якого прийнята за одиницю виміру довжини, називають *одиничним*. Позначимо через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ одиничні вектори, відкладені від точки *O* в додатних напрямах на осях *Ox*, *Oy*,*Oz* прямокутної системи координат.

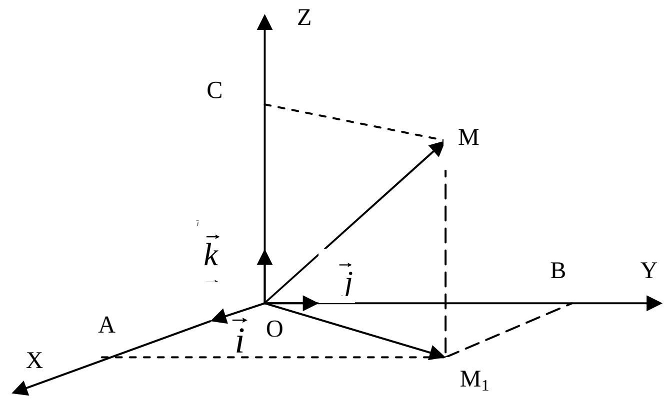


Рис. 2.5

Одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, де $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$ й $(|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1)$, що мають напрями додатних координатних півосей, називаються *координатними векторами* або *ортами*.

Теорема 1 (про розкладання вектора по осях координат).
Кожен вектор $\vec{a}$ можна представити у вигляді:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (2.3.1)$$

і *притім єдиним чином.*

Якщо вектор $\vec{a}$ представлений у вигляді (2.3. 1), то говорять, що вектор $\vec{a}$ розкладений по векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Вектори $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$ і $a_z\vec{k}$ називають *складовими вектора* $\vec{a}$ *по осях* Ox, Oy й Oz. Коефіцієнти a_x, a_y, a_z – розкладання вектора $\vec{a}$ по одиничних векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ називають *координатами вектора* $\vec{a}$ в даній системі координат *Oxy* й записують $\vec{a}$ $(a_x; a_y; a_z)$. Тоді $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

З єдиності розкладання випливає, що рівні вектори мають рівні відповідні координати, і, обернено, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.

Нехай дана точка *M(x; y;z)*. (рис.2.5) Тоді

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, *-це радіус-вектор точки M* (2.3. 2)

де *x, y, z* – координати точки *M*, тобто $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

Формула (2.3.2) представляє собою розкладання вектора $\overrightarrow{OM}$ *по векторах* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Числа x, y, z, що є проекціями вектора $\overrightarrow{OM}$, *називаються координатами вектора* $\vec{r}$:

$x = np_{ox}\vec{r}$, $y = np_{oy}\vec{r}$, $z = np_{oz}\vec{r}$,

Теорема 2. *Кожна координата суми векторів* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ *і* $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *дорівнює сумі відповідних координат цих векторів; кожна координата добутку вектора* $\vec{a}$ *на число λ дорівнює добутку відповідної координати цього вектора на число λ.*

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \leftrightarrow \vec{c} = (\lambda a_1 + \mu b_1)\vec{i} + (\lambda a_2 + \mu b_2)\vec{j} + (\lambda a_3 + \mu b_3)\vec{k}$$

Теорема 3. *У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні. І обернено, якщо у двох векторів відповідні координати пропорційні, то вектори колінеарні.*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a} \leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda .$$

Якщо λ>0, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ *– вектори однаково напрямлені; якщо λ<0,* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ *– вектори протилежно напрямлені.*

З означення колінеарних векторів випливає, що два вектори колінеарні в тім і тільки тім випадку, якщо один з них може бути отриманий множенням іншого на деяке число λ, тобто

$\vec{a} = \lambda\vec{b}$. (2.3. 3)

Нехай вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ задані своїми координатами, тобто $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тоді векторна рівність (2.3. 3) еквівалентна трьом числовим:

$x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$, $z_1 = \lambda z_2$,

з яких випливає

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$. (2.3. 4)

Таким чином, вектори *колінеарні*, якщо їхні *координати пропорційні*.

2.4. Ділення відрізка в даному відношенні

Якщо $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$– кінці відрізка M_1M_2, а точка $M(x,y,z)$ ділить цей відрізок у відношенні $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$, то координати цієї точки

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\ (\lambda\neq -1). \qquad (2.4.1)$$

Зокрема, якщо $M(x, y,z)$ – середина відрізка M_1M_2, то $\lambda=1$ й

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Приклад 1. Задано точки $A(2;-3;1)$ і $B(12;7;11)$. Знайти точку $M(x,y,z)$, що ділить відрізок BA у відношенні $\frac{BM}{MA}=\frac{1}{3}$.

Розв’язання. Вважаючи точку B початковою точкою відрізка, знаходимо:

$$x=\frac{12+\frac{1}{3}\cdot 2}{\frac{4}{3}}=\frac{19}{2}\ ,\ y=\frac{7-\frac{3}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{9}{2},\ z=\frac{11+\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{4}{3}}=\frac{17}{2}.$$

Відповідь: $M\left(\frac{19}{2};\frac{9}{2};\frac{17}{2}\right)$.

Приклад 2. Задано точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. За допомогою векторів виразити координати точки M, що ділить відрізок AB навпіл. (рис. 2.6).

Розв’язання. Радіуси-вектори точок A і B: $\overrightarrow{OA}=(x_1;y_1;z_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2;y_2;z_2)$. За правилом додавання векторів $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$.

Тому що $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OC}}{2}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ тобто

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

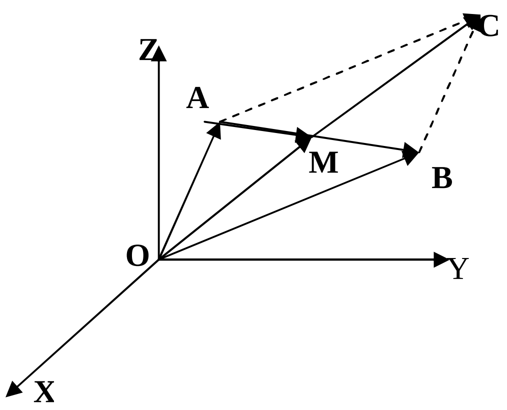


Рис. 2.6.

2.5. Напрямні косинуси. Орт вектора

Модуль вектора, заданого своїми координатами (x,y,z), обчислюється за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; *напрямні косинуси* (тобто косинуси кутів, які вектор $\vec{a}$ становить із додатними напрямами відповідних осей координат):

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}, \quad \text{причому} \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Орт вектора визначається як $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Очевидно, що напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ є координатами орта цього вектора $\vec{a}^0$.

Приклад. Нехай *A(1; 2; 0), B(3; 1; -2)*. Знайти напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв’язання. Координати вектора $\overrightarrow{AB}$ визначаються так: *x=3-1=2; y=1-2=-1; z=-2-0=-2,*

Тобто вектор $\overrightarrow{AB} = (2;-1;-2)$, його довжина $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} = 3$; напрямні косинуси: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{1}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

2.6. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів називається число рівне добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, де $0 \le \varphi \le \pi$.

Проекція вектора $\vec{b}$ *на на вісь, визначену вектором* $\vec{a}$, *дорівнює* $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi$. *Звідси випливає, що скалярний добуток* $(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b}$ *або* $(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\vec{a}$.

Властивості скалярного добутку:

1. Скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли множники перпендикулярні.
2. Скалярний добуток двох ненульових векторів додатний, якщо вектори становлять гострий кут, від’ємний, якщо вектори становлять тупий кут.
3. Скалярний добуток не змінюється від перестановки співмножників.
4. $(\vec{a}\vec{a}) = |\vec{a}|^2$. $\rightarrow$ $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\vec{a})}$.

Отже, модуль вектора дорівнює кореню квадратному зі скалярного добутку вектора на себе.

5. Скалярний множник можна виносити за знак скалярного добутку: $(\alpha\vec{a},\vec{b}) = \alpha(\vec{a},\vec{b})$.

6. Дистрибутивність додавання векторів стосовно скалярного множення на вектор:

$((\vec{a}+\vec{b}),\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$

Вираз скалярного добутку в декартових прямокутних координатах через компоненти співмножників.

Нехай $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, тоді $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Косинус кута між векторами через їхні компоненти знаходиться за формулою:

$$cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів: $(\vec{a},\vec{b})=0$ або $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

Зокрема, на площині *X0Y :*

$$\vec{a}=(x_1,y_1),\ \vec{b}=(x_2,y_2),$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2},\ |\vec{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2},\ cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

Приклад 1. Задано три точки на площині A(1;2), B(2;2), C(1,5;2,5). Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{AC}$.

Розв’язання. Знаходимо

$$\overrightarrow{AB}=(2-1;2-2)=(1;0),\ \overrightarrow{AC}=(1,5-1;2,5-2)=(0,5;0,5),$$

Тоді:

$$cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\sqrt{1^2+0^2}\cdot\sqrt{0,5^2+0,5^2}}=\frac{0,5}{\sqrt{0,5}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2. Обчислити скалярний добуток.

$(2\vec{m}+3\vec{n})\cdot(4\vec{m}-6\vec{n})$, де $\vec{m}$ й $\vec{n}$ − одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Розв’язання.

Знаходимо, використовуючи властивості скалярного добутку.

$$(2\vec{m}+3\vec{n})\cdot(4\vec{m}-6\vec{n})=$$

$$2\cdot4(\vec{m}\vec{m})+3\cdot4(\vec{n}\vec{m})-2\cdot6(\vec{m}\vec{n})-3\cdot6(\vec{n}\vec{n})=8\cdot1+12\cdot0-12\cdot0-18\cdot1=-10,$$

де $(\vec{m},\vec{m})=(\vec{n},\vec{n})=1,\ (\vec{m},\vec{n})=(\vec{n},\vec{m})=0$.

Приклад 3. При якому значенні α вектори $\vec{a}=(2;-3;4),\vec{b}=(\alpha;-6;8)$ паралельні?

Розв’язання. Вектори паралельні, якщо їхні координати пропорційні, тобто:

$\frac{\alpha}{2}=\frac{-6}{-3}=\frac{8}{4}$. Звідси знаходимо: $\alpha=4$.

Приклад 4.

Дано: $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=5,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{2\pi}{3}$. Знайти, при якому значенні α вектори

$\vec{p}=\alpha\vec{a}+17\vec{b}$ і $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні.

Розв’язання.

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{p}\vec{q}=0$. Звідси

$\vec{p}\vec{q} = (\alpha\vec{a} + 17\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b}) = 3\alpha(\vec{a},\vec{a}) + 17\cdot 3(\vec{b},\vec{a}) -$

$\alpha(\vec{a},\vec{b}) - 17(\vec{b}\cdot\vec{b}) = 3\alpha|\vec{a}|^2 + 51|\vec{b}||\vec{a}|\cos\frac{2\pi}{3} - \alpha|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{3} - 17|\vec{b}|^2 =$

$3\alpha\cdot 4 + (51-\alpha)\cdot 10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 17\cdot 25 = 0 \Rightarrow \alpha = 40.$

Приклад 5. Вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ утворюють кут 120^0, $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Розв'язання.

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a},\vec{b}) + |\vec{b}|^2} =$$

$$\sqrt{|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^0 + |\vec{b}|^2} = \sqrt{9 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 25} = \sqrt{9+15+25} = \sqrt{49} = 7.$$

Приклад 6. При якому значенні α вектори $\vec{a} = (1; \alpha; -2)$ й $\vec{b} = (\alpha; 3; -4)$ перпендикулярні?

Розв'язання.

Обчислимо скалярний добуток векторів і прирівняємо його до нуля.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot\alpha + \alpha\cdot 3 + (-2)\cdot(-4) = 4\alpha + 8 = 0$,

звідси знаходимо $\alpha=-2$.

Приклад 7. Задано три вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Довести, що вектор $\vec{d} = (\vec{b},\vec{c})\vec{a} - (\vec{a},\vec{c})\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{c}$.

Розв'язання.

Умова перпендикулярності векторів − рівність нулю їхнього скалярного добутку. Помножимо скалярно вектор $\vec{d}$ на $\vec{c}$ й, у силу властивостей скалярного добутку, одержимо:

$\vec{d}\cdot\vec{c} = ((\vec{b},\vec{c})\vec{a} - (\vec{a},\vec{c})\vec{b})\vec{c} = (\vec{b},\vec{c})(\vec{a},\vec{c}) - (\vec{a},\vec{c})(\vec{b},\vec{c}) = 0$.

Приклад 8. Знайти вектор $\vec{a}$, колінеарний вектору $\vec{b} = (2; -1; 0)$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b} = 10$.

Розв'язання.

Вектор $\vec{a} = \lambda\vec{b} = \lambda(2; -1; 0)$ (оскільки колінеарні), тоді їхній скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lambda(2\cdot 2 - 1\cdot(-1) + 0\cdot 0) = 5\lambda = 10$.

Звідси знаходимо: $\lambda=2$, $\vec{a} = 2(2; -1; 0) = (4; -2; 0)$.

Приклад 9. Вектор $\vec{b} \| \vec{a}$, де $\vec{a}$=(8; -10; 13) і утворює з віссю OZ гострий кут. Знаючи, що $|\vec{b}| = \sqrt{37}$, знайти його координати.

Розв'язання.

З умови колінеарності вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\vec{b} = (8\lambda; -10\lambda; 13\lambda)$, при цьому повинна виконуватися умова $13\lambda>0$, тобто, $\lambda>0$ (вектор $\vec{b}$ утворює з віссю OZ гострий кут). Модуль вектора $\vec{b}$ дорівнює

$|\vec{b}| = \sqrt{\lambda^2(8^2 + (-10)^2 + 13^2)} = |\lambda|\sqrt{64+100+169} = |\lambda|\sqrt{333} = |\lambda|\sqrt{9\cdot 37} = \sqrt{37}$, звідси: $|\lambda| = \frac{1}{3}, \lambda = \pm\frac{1}{3}.$ Беремо $\lambda = \frac{1}{3}$ (за умовою λ>0). Виходить, $\vec{b} = \left(\frac{8}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{13}{3}\right).$

Приклад 10. Задано три вектори $\vec{a} = (3;-1), \vec{b} = (1;-2), \vec{c} = (-1;7).$ Знайти розкладання вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по векторах $\vec{a}$ й $\vec{b}$.

Розв'язання. За правилом додавання векторів маємо: $\vec{p}$= (3+1-1; -1-2+7)=(3; 4)

Розкласти вектор $\vec{p}$ по векторах $\vec{a}$ й $\vec{b}$ означає: знайти α і β такі, що буде виконуватися рівність $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Два вектори рівні, якщо рівні їхні відповідні компоненти:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3 \\ -\alpha - 2\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2; \quad \beta = -3.$$

Отже, $\vec{p} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{b}$.

Приклад 11. Задано: $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 2, \quad \vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \quad (\vec{b}, \vec{c}) = 120^0$.

Знайти $(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c})$

Розв'язання.

Використовуючи означення й властивості скалярного добутку, одержимо:

$$(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) =$$

$$= 2|\vec{a}|^2 + 3\vec{b}\vec{a} - \vec{c}\vec{a} - 4\vec{a}\vec{b} - 6|\vec{b}|^2 + 2\vec{c}\vec{b} + 6\vec{a}\vec{c} + 9\vec{b}\vec{c} - 3|\vec{c}|^2 =$$

$$= 2|\vec{a}|^2 - \vec{a}\vec{b} + 5\vec{a}\vec{c} + 11\vec{b}\vec{c} - 6|\vec{b}|^2 - 3|\vec{c}|^2 =$$

$$= 2\cdot 4^2 - 4\cdot 3\cdot \cos 90^0 + 5\cdot 4\cdot 2\cdot \cos 90^0 + 11\cdot 3\cdot 2\cdot \cos 120^0 - 6\cdot 3^2 - 3\cdot 2^2 = -67$$

Приклад 12. Задано: $|\vec{m}| = 4, |\vec{n}| = 3, \quad (\vec{m}, \vec{n}) = 60^0$.

Знайти величину кута між векторами $\vec{m} - \vec{n}$ й $\vec{m} + \vec{n}$.

Розв'язання.

Використовуючи скалярний добуток, знаходимо

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{m} - \vec{n})(\vec{m} + \vec{n})}{|\vec{m} - \vec{n}||\vec{m} + \vec{n}|}.$$

Обчислюємо $(\vec{m} - \vec{n})(\vec{m} + \vec{n}) = |\vec{m}|^2 - |\vec{n}|^2 = 4^2 - 3^2 = 7$;

$$|\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{(\vec{m} - \vec{n})(\vec{m} - \vec{n})} = \sqrt{|\vec{m}|^2 - 2\vec{n}\vec{m} + |\vec{n}|^2} = \sqrt{16 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos 60^0 + 9} = \sqrt{13};$$

$$|\vec{m} + \vec{n}| = \sqrt{(\vec{m} + \vec{n})(\vec{m} + \vec{n})} = \sqrt{|\vec{m}|^2 + 2\vec{n}\vec{m} + |\vec{n}|^2} = \sqrt{16 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos 60^0 + 9} = \sqrt{37};$$

$\cos\varphi = \frac{7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{37}} = \frac{7}{\sqrt{481}}$, звідки $\varphi = \arccos\frac{7}{\sqrt{481}}$.

2.7. Векторний добуток

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *називається вектор* $\vec{c}$, *що задовольняє умовам:*

1) *перпендикулярний обом векторам-співмножникам* $\vec{a}$ *й* $\vec{b}$,

2) *якщо дивитися з його кінця, то найкоротший поворот на кут* φ *від* $\vec{a}$ *до* $\vec{b}$ *відбувається проти годинникової стрілки, тобто трійка векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *є правою.*

3) *модуль векторного добутку дорівнює* $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$.

Векторний добуток позначається $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ або $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *й* $\vec{b}$ *:*

$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ або $S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$.

Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ й $\vec{b}$: $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Основні властивості векторного добутку:

1.2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$; $\alpha\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\alpha\vec{b}\right)$; 3. $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Векторний добуток через координати векторів-співмножників виражається як

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Необхідною й достатньою умовою колінеарності векторів є рівність нулю їхнього векторного добутку.

Приклад 1. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ й $\vec{b} = 5\vec{m} - \vec{n}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості векторного добутку, одержимо:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[2\vec{m} + 3\vec{n}, 5\vec{m} - \vec{n}\right] = \left[2\vec{m}, 5\vec{m}\right] + \left[3\vec{n}, 5\vec{m}\right] - \left[2\vec{m}, \vec{n}\right] - \left[3\vec{n}, \vec{n}\right].$$

Оскільки $\left[2\vec{m}, 5\vec{m}\right] = 0$, $\left[3\vec{n}, n\right] = 0$, $\left[\vec{m}, \vec{n}\right] = -\left[\vec{n}, \vec{m}\right]$, одержимо

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = 15\left[\vec{n}, \vec{m}\right] + 2\left[\vec{n}, \vec{m}\right] = 17\left[\vec{n}, \vec{m}\right].$$

Приклад 2. Задані 3 вершини паралелограма *A(1;-1;2); B(5;-6;2); C(1;3;-1).* Знайти його площу.

Розв'язання.

Площа $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, $\overrightarrow{AB}=(4;-5;0)$, $\overrightarrow{AC}=(0;4;-3)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=15\vec{i}+12\vec{j}-16\vec{k};$$

$$S=\sqrt{15^2+12^2+(-16)^2}=\sqrt{625}=25(кв.\ од.).$$

Приклад 3. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{m}+\vec{n}$ й $\vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$,

якщо $\left|\vec{m}\right|=2, \left|\vec{n}\right|=1, \widehat{\vec{m}\vec{n}}=\dfrac{\pi}{6}$.

Розв’язання. $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$,

$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{m}+\vec{n},2\vec{m}-\vec{n}\right]=\left[\vec{m},2\vec{m}\right]+\left[\vec{n},2\vec{m}\right]-\left[\vec{m},\vec{n}\right]-\left[\vec{n},\vec{n}\right]$. Оскільки

$\left[\vec{m},2\vec{m}\right]=0,\quad \left[\vec{n},\vec{n}\right]=0,\quad \left[\vec{m},\vec{n}\right]=-\left[\vec{n},\vec{m}\right]$, то $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=2\left[\vec{n},\vec{m}\right]+\left[\vec{n},\vec{m}\right]=3\left[\vec{n},\vec{m}\right]$

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot\left|3\left[\vec{n},\vec{m}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\left|\vec{n}\right|\left|\vec{m}\right|\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ (кв. од.).

2.8. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число, отримане в результаті скалярного множення одного з даних векторів на векторний добуток двох інших:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

Властивості:

1. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right).$
2. $\left(\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}\right)=\alpha_1\left(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}\right)+\alpha_2\left(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}\right)$ – властивість лінійності.
3. *Модуль мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $V=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.*

Об'єм трикутної піраміди дорівнює $V=\dfrac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.

4. *Якщо вектори задані своїми координатами в ортогональній системі координат:*

$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1);\quad \vec{b}=(x_2;y_2;z_2);\quad \vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$, *то мішаний добуток можна знайти за формулою:*

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

З означення мішаного добутку випливає, що необхідною й достатньою умовою компланарності векторів є рівність нулю їхнього мішаного добутку:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0 \text{ або } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Приклад 1. Обчислити мішаний добуток векторів: $\vec{a}=(2;-1;3),\quad \vec{b}=(1;4;-2),\quad \vec{c}=(-3;2;5)$.

Розв’язання. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$=40+6-6+36+8+5=89.

Приклад 2. Задано вершини піраміди A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;2). Знайти її об'єм і довжину висоти, опущеної з вершини D.

Розв’язання.

Об'єм піраміди дорівнює

$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)\right|$; або $V=\frac{1}{3}S_{осн.}H \Rightarrow H=\frac{3V}{S_{осн.}}$.

$S_{осн.}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. Знаходимо $\overline{AB}=\left(2;-2;-3\right),\overline{AC}=\left(4;0;6\right),\ \overline{AD}=\left(-7;-7;1\right)$,

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -14 & -7 & 1 \end{vmatrix}=260. \text{ Тоді } V=\frac{1}{6}260(куб.\,од.).$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k};$$

$S_{осн.}=2\sqrt{9+36+4}=2\cdot7=14(кв.\,од.);\quad H=\frac{3\cdot260}{6\cdot14}=\frac{65}{7}$ (од. довж.)

Приклад 3. Чи лежать точки *A(3;-1;2), B(-2;2;5), C(1;4;2), D(0;1;-2)* в одній площині?

Розв’язання. Якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ компланарні, то точки *A, B, C, D* лежать в одній площині.

У цьому випадку мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$=(-5; 3; 3), $\overrightarrow{AC}$=(-2; 5; 0) і $\overrightarrow{AD}$=(-3; 2; -4) повинен рівнятися нулю. Знаходимо мішаний добуток

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-5 & 3 & 3\\ -2 & 5 & 0\\ -3 & 2 & -4\end{vmatrix}=100-12+0+45-24=109\neq0.$$

Виходить, вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ некомпланарні й, отже, точки *A, B, C, D* не лежать в одній площині.

2.9. Лінійний *n*-мірний простір

Множина R елементів x,y,...,z,... називається лінійним простором, якщо для будь-яких двох його елементів x й y визначена сума x+y R і для кожного елемента $x\in R$ й дійсних чисел α і β визначений добуток $\alpha\cdot x\in R$ так, що виконані наступні умови(аксіоми лінійного простору).

1. $x+y=y+x; \forall x,y\in R$;
2. $(x+y)+z=x+(y+z); \forall x,y,z\in R$;
3. *Існує такий (нульовий) елемент $O\in R$, що $x+O=x, \forall x\in R$;*
4. *Для кожного елемента $x\in R$ існує такий елемент -x (називаний протилежним до x), що x+(-x)=0;*
5. $1\cdot x=x$, $\forall x\in R$;
6. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \forall x,y\in R$;
7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x, \forall x\in R$;
8. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x, \forall x\in R$.

Приклад 1. Множина всіх функцій однієї незалежної змінної *x*, визначених і неперервних на відрізку $[a,b]$ є лінійним простором. Це випливає з того, що будь-яким двом функціям $f_1(x)$ і $f_2(x)$ із цієї множини можна зіставити їхню суму $f_1(x)+f_2(x)$, що також визначена й неперервна на $[a,b]$ й, отже, буде належати цій множині. Добуток $\alpha\cdot f_1(x)$ – теж неперервна функція на $[a,b]$. Всі інші аксіоми лінійного простору також виконуються. Роль нуля грає функція, тотожно рівна нулю.

Приклад 2. Упорядкована сукупність *n* чисел представляє *n-мірний* вектор $\vec{a}$: $\vec{a}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

- *Два n-мірних вектори рівні тоді й тільки тоді, коли рівні їхні відповідні компоненти, тобто $\vec{a}=\vec{b}$, якщо $x_i=y_i$; $i=\overline{1,n}$.*
- *Під сумою двох векторів однакової розмірності n розуміють такий третій вектор, координати якого дорівнюють сумам відповідних координат векторів-доданків: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$.*

- *Під добутком вектора на число* α *розуміють вектор* $\alpha\vec{a} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Множину *n-мірних* векторів, над якими встановлені операції додавання й множення на число, що задовольняють наведеним вище аксіомам лінійного простору, називають *n-мірним векторним лінійним простором* R^n.

Зокрема, R^1 є сукупність *дійсних чисел*; R^2 – сукупність *векторів на площині*; R^3 – сукупність *векторів у просторі*.

2.10. Лінійна залежність векторів

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n$ *векторного простору R називається сума добутків цих векторів на довільні дійсні числа* $\alpha_i; i = \overline{1,n}$*:*

$$\vec{a}_n = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\vec{a}_{n-1} + \alpha_n\vec{a}_n.$$

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *називаються лінійно незалежними, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нулю:* $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ *тільки при всіх* $\alpha_i = 0\left(i = \overline{1,n}\right)$. *Вектори лінійно залежні, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нулю при хоча б одному із чисел* $\alpha_i \neq 0$. Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно залежні, то, принаймні, один з них можна представити у вигляді лінійної комбінації інших. Наприклад, нехай $\alpha_1 \neq 0$, тоді $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n$, тобто вектор $\vec{a}_1$ є лінійною комбінацією інших *(n-1)* векторів. На площині будь-які три вектори лінійно залежні; у просторі чотири вектори лінійно залежні. Максимальне число незалежних векторів на площині дорівнює двом, у просторі − трьом. Прикладом лінійно незалежних векторів на площині є два неколінеарних вектори; у просторі − три некомпланарних вектори.

Лінійний простір R називається n-мірним, якщо в ньому існує n лінійно незалежних векторів, а будь-які (n+1) векторів є лінійно залежними. Інакше кажучи, *розмірність простору – це максимальне число лінійно незалежних векторів, що містяться в ньому*. Розмірність простору *R* позначається: $n = \dim(R)$.

Будь-які n лінійно незалежних векторів утворюють базис n-мірного простору.

Розглянемо рівність $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0,$ де

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

У координатній формі наведена рівність запишеться у вигляді однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \ldots + \alpha_n a_{1n} = 0 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_n a_{2n} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \ldots + \alpha_n a_{nn} = 0 \end{cases}$$

Якщо ранг матриці $r=n$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ й вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно незалежні. Якщо $r < n$, то хоча б один з векторів $\vec{a}_i$ є лінійна комбінація інших (оскільки система має нескінченну множину розв'язків), вектори лінійно залежні.

Приклад 3. Задано вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$; $\vec{a}_2 = (-2; 1; -1)$; $\vec{a}_3 = (3; 2; -1)$. Показати, що вектори лінійно незалежні.

Запишемо $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0$, або $\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Одержимо систему рівнянь $\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$

Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

$r(A)=3$, бо $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$, значить, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Система векторів лінійно незалежна.

Приклад. Нехай $\vec{a}_1 = (1; 2; -3)$; $\vec{a}_2 = (-1; 2; 4)$; $\vec{a}_3 = (1; 6; -2)$, розглянемо матрицю

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.; $r(A) = 2$, де $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Система має нескінченну множину розв'язків, оскільки $r<n$. Вектори лінійно залежні.

2.11. Розкладання вектора по заданому базису

Нехай вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно незалежні, тобто утворюють базис n-мірного простору.

Теорема. *Кожен вектор* $\vec{X}$ *лінійного простору R можна представити, і притім єдиним способом, у вигляді лінійної комбінації векторів базису:* $\overrightarrow{X} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$. Таке представлення називається *розкладанням вектора по базису* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, а коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ − *координатами вектора* $\overrightarrow{X}$ в цьому базисі.

Для визначення коефіцієнтів розкладання дана рівність записується в координатній формі. Одержимо систему лінійних неоднорідних рівнянь щодо невідомих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.Розв’язуючи її, знайдемо коефіцієнти розкладання вектора $\overrightarrow{X}$ по базису.

Приклад. Показати, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворять базис і знайти розкладання $\vec{b}$ по даному базису: $\vec{a}_1 = (1;-1;2), \vec{a}_2 = (2;2;-1), \vec{a}_3 = (2;1;0), \vec{b} = (3;7;-7)$.

Розкладемо вектор $\vec{b}$ по векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$.

Розв’яжемо систему відносно методом повного виключення.

$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{b}$	
1	2	2	3	
-1	2	1	7	$e_2 + e_1 \to e_2$
2	-1	0	-7	$e_3 + e_1(-2) \to e_3$
1	2	2	3	
0	4	3	10	$e_2 + e_3 \to e_2$
0	-5	-4	-13	
1	2	2	3	$e_2 \cdot 2 + e_1 \to e_1$
0	-1	-1	-3	
0	4	3	10	$e_2 \cdot 4 + e_3 \to e_3$
1	0	0	-3	
0	1	1	3	$e_3 + e_2 \to e_2$
0	0	-1	-2	
1	0	0	-3	
0	1	0	1	
0	0	1	2	

Як видно з розв’язку, ранг матриці системи дорівнює 3, отже, вектори лінійно незалежні й утворюють базис. Розв’язок системи $\alpha_1 = -3; \alpha_2 = 1; \alpha_3 = 2$. Виходить, $\vec{b} = -3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$ – розкладання вектора $\vec{b}$ по базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Контрольні завдання до розділу 2

Завдання 1

2.1.1.Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

a) $\vec{a}$=(-2;3;1), $\vec{b}$=(5;7;-4);

b) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

2.1.2. При якому α вектори $\vec{l}$=(6; α;-8) і $\vec{m}$=(-3;-1;4) паралельні?

2.1.3. Знайти кут між векторами $\vec{a}$=(-1;2;-2) і $\vec{b}$=(6;3;-6).

2. 1.4 Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{a}+\vec{b}$,якщо $\vec{a}$=(1;2;1) і $\vec{b}$=(2;-1;0).

2.1.5.При якому значенні x вектори $\vec{a}$=(x;3;4) і $\vec{b}$=(5;6;3) перпендикулярні?

2.1.6.Задані вектори $\vec{a}$=(2;3;-5), $\vec{b}$=(3;0;1) і $\vec{c}$=(4;-3;2). Знайти координати і довжину вектора $\vec{d}=3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

2.1.7.Знайти (у градусах) кут між векторами $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$.

2.1.8. Знайти кут між векторами $2\vec{a}$ і $\vec{b}$ /2, якщо $\vec{a}$=(-4;2;4), $\vec{b}=(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$.

2.1.9. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, обчислити $(3-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

2.1.10.Задані чотири точки: *A(-2;-3;8), B(2;1;7), C(1;4;5), D(-7;-4;7).* Чи будуть колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$?

2.1.11.Знайти вектор $\vec{b}$=(x,y, z), колінеарний вектору $\vec{a}=(2\sqrt{2};-1;4)$, якщо $|\vec{b}|=10$.

2.1.12. Знайти косинус кута між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$, що задовольняють системі рівнянь $\vec{p}+2\vec{q}=\vec{b}$, $2\vec{p}+\vec{q}=\vec{a}$, якщо відомо, що в прямокутній системі координат $\vec{a}=(1;1)$ $\vec{b}=(1;1)$.

2.1.13. Вектор $\vec{x}$ задовольняє наступним умовам : a) $\vec{x}$ колінеарний $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{j}-7,5\vec{k}$; b) $\vec{x}$ утворює гострий кут з віссю OZ; c) $|\vec{x}|$=50.

Знайти координати вектора $\vec{x}$.

2.1.14. Задані два вектори $\vec{a}$ =(-1;1;1) і $\vec{b}$ =(2;0;1).

Знайти вектор, якщо відомо, що він лежить в площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перпендикулярний вектору $\vec{a}$ і $\vec{a}\cdot\vec{x}$ =7.

2.1.15.Задані вершини трикутника *A(3;2;-3),B(5;1;-1),C(1;-2;1).* Знайти його внутрішній кут при вершині *A*.

2.1.16. Довести, що точки A (-2;-3),B(-3;1),C(7;7),D(3;0) служать вершинами трапеції. Знайти довжину середньої лінії трапеції.

2.1.17 Трикутник заданий координатами своїх вершин A*(3;2;-3), B(5;1;-1)* і *C(1;-2;1)* .Знайти величину зовнішнього кута трикутника при вершині *A* і координати вектора $\vec{a}$, що має напрям вектора $\overrightarrow{AB}$, а довжину вектора $\overrightarrow{AC}$.

2.1.18.Задані три послідовні вершини паралелограма *ABCD: A(-3;-2;0), B(3;-3;1), C(5;0;2)* .Знайти четверту вершину D і кут між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

2.1.19. Трикутник заданий координатами своїх вершин *A(2;1;2), B(1;0;0), C(1+*$\sqrt{3}$*;*$\sqrt{3}$*;-*$\sqrt{6}$*).* Обчислити величини кутів трикутника і довжину медіани, проведеної до сторони ВС.

2.1.20. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

2.1.21. Довести, що точки *A (3; 0), B (0; 1), C (2; 7), D (5; 6)* є вершинами прямокутника *ABCD.* Обчислити його площу.

2.1.22. Обчислити довжину вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $\vec{a}$ = (1; 1; -1), $\vec{b}$ = (2; 0; 0).

2.1.23. При якому значенні α кут між векторами $\vec{x} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ і $\vec{y} = \alpha\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ дорівнює $\arccos \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$?

2.1.24. Задані вектори $\vec{a} = (1;-1;3)$, $\vec{b} = (3;-5;6)$. Обчислити $np_{\vec{a}}\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$.

2.1.25. Вектор $\vec{x} \perp \vec{b} = \left(\vec{i} - 22\vec{y} - 5\vec{k}\right)$ і утворює з віссю OY тупий кут. Знайти його координати, знаючи, що довжина вектора $\vec{x}$ рівна 14.

2.1.26. Довести, що сума векторів, що сполучають центр трикутника з його вершинами, рівна нулю.

2.1.27. Задані три точки A (2;1), B (3; -2), C (0; λ). При якому значенні λ дані точки лежать на одній прямій?

2.1.28. Точки A і B мають координати A (1; 2), B (7; 10). Знайти координати *(x; y)* точки, яка ділить відрізок AB в відношенні 1:3, рахуючи від точки A.

2.1.29. Трикутник заданий координатами вершин A (2; 2$\sqrt{3}$), B (0; 0), C(3; $\sqrt{3}$). Знайти кути трикутника ABC.

2.1.30. Заданий трикутник ABC : A (1; 2), B (-2; 3), C (2; 4). Точки M, N і P – середини сторін BC, CA і AB трикутника. Знайти координати векторів $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{PM}$.

РОЗДІЛ 3

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. Поняття про рівняння ліній і поверхонь

3.1.1. Геометричні місця точок

Метод аналітичної геометрії полягає в тому, що геометричним об'єктам ставляться у відповідність рівняння (або системи рівнянь), що дозволяє геометричні об'єкти досліджувати алгебраїчними методами.

Для визначення положення точки на площині (у просторі) вводиться система координат.

У цей час відомі біля двадцяти різних систем координат, з яких найбільш уживаними є система прямокутних декартових координат, полярна, циліндрична і сферична системи координат.

Положення точки на площині визначається парою чисел x і y: $M(x,y)$; у просторі – трійкою чисел x,y і z: $M(x,y,z)$.

Означення 1: *Рівнянням лінії L у заданій системі координат на площині називається рівняння $F(x,y)=0$, якщо йому задовольняють координати точок лінії L і тільки вони.*

Приклад 1. Скласти рівняння кола в декартовій прямокутній системі координат радіуса R с центром у точці $O(a;b)$.

Розв'язання:

Коло є геометричне місце точок, що задовольняють умові $\left|\overline{OM}\right| = R$, де $M(x,y)$ – довільна точка кола, тоді $\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, звідси одержимо $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ – шукане рівняння кола. Зокрема, якщо центр перебуває на початку координат, рівняння має вигляд: $x^2+y^2=R^2$.

Аналогічно, рівняння сфери із центром у точці $O(a,b,c)$ радіуса R має вигляд $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ або $x^2+y^2+z^2=R^2$

Означення 2: *Рівняння $F(x,y,z)=0$ називається рівнянням поверхні S у даній системі координат, якщо йому задовольняють координати точок поверхні S і тільки вони.*

Геометричне місце точок - це множина точок, що володіють деякою загальною ознакою.

Приклад 2. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $M_1(3;2)$ і $M_2(2;3)$.

Розв'язання:

Нехай $M(x,y)$ – довільна точка шуканого геометричного місця точок.

За умовою $\left|\overline{M_1M}\right| = \left|\overline{M_2M}\right|$, де

$\left|\overline{M_1M}\right| = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$, $\left|\overline{M_2M}\right| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$,

тоді $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

або після спрощень

x^2-$6x+9+y^2$-$4y+4=x^2$-$4x+4+y^2$-$6y+9 \Rightarrow y$-$x=0$.
Це рівняння прямої.

Приклад 3. Точка *M* рухається так, що в довільний момент часу її відстань від точки $M_1(6;0)$ утроє більше відстані до точки $M_2(2/3;\ 0)$. Знайти траєкторію руху точки *M*.

Розв'язання:
За умовою $\left|\overrightarrow{M_1M}\right|=3\left|\overrightarrow{M_2M}\right|$. Виразимо відстані $\left|\overrightarrow{M_1M}\right|$ й $\left|\overrightarrow{M_2M}\right|$ через координати точок, тоді

$$\left|\overrightarrow{M_1M}\right|=\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}\,,\quad \left|\overrightarrow{M_2M}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-0)^2}$$

або $\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}=3\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-0)^2}$,

що після спрощень дає: $x^2+y^2=4$.
Одержали рівняння кола радіуса $R=2$ із центром на початку координат.

Приклад 4. Скласти рівняння кола, якщо її центр знаходиться на початку координат і пряма $3x$-$4y+20=0$ є дотичною до кола.

Розв'язання. Точка $O(0;0)$– центр кола, отже, рівняння кола має вигляд $x^2+y^2=R^2$.

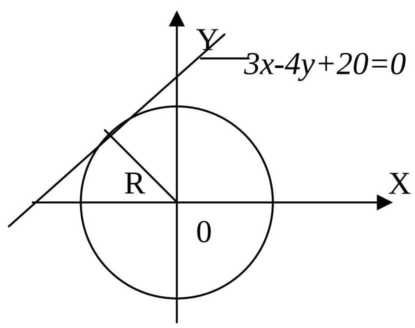


Рис.3.1

Оскільки радіус кола в точці дотику перпендикулярний дотичній, його довжина дорівнює відстані від точки O(0;0) (Рис. 3.1) до прямої $3x$-$4y+20=0$, тобто
$R=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 0+20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{5}=4$. Таким чином, рівняння кола $x^2+y^2=16$.

3.1.2. Полярна система координат

Полярна система на площині задана, якщо задано точку *O*, що називається полюсом і вихідний з полюса промінь ρ(або *r*), що називається полярною віссю.

Положення точки на площині в полярній системі координат визначається двома числами: радіусом $\rho=\left|\overrightarrow{OM}\right|$, що називається полярним радіусом точки *M* і виражає в даному масштабі відстань її від полюса, тобто довжину відрізка *OM*, і числом φ– полярним кутом між напрямом полярної осі й вектором $\overrightarrow{OM}$, відлічуваним у напрямі проти годинникової стрілки від полярної осі.

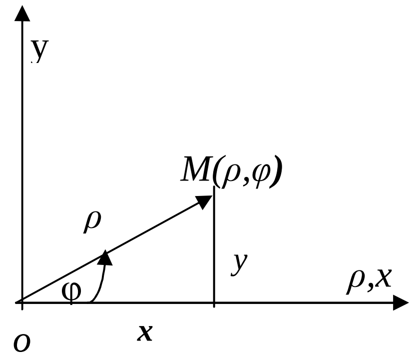


Рис. 3.2

Якщо вмовитися величину полярного радіуса вважати додатною, а полярний кут брати в межах $0 \le \varphi < 2\pi$, то кожній точці буде відповідати одна пара чисел ρ, φ. Можна обмежити зміну полярного кута умовами $-\pi < \varphi \le \pi$. Числа ρ і φ називають полярними координатами точки M (Рис. 3.2).

Полюсу O відповідає $\rho=0$; значення полярного кута для полюса невизначено. В інших точок $\rho>0$, а φ визначено з точністю до доданку кратного 2π. Це означає, що пари чисел (ρ,φ) і $(\rho,\varphi+2k\pi)$, де k – ціле число, є полярні координати однієї й тієї ж точки.

Зв'язок між декартовими й полярними координатами

Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат, помістивши її початок у полюс O і прийнявши за вектори $\vec{i}$ й $\vec{j}$ вектори, напрямлені відповідно уздовж ρ і під кутом $\pi/2$ до ρ. Як видно з рис.3.2 декартові координати x й y через полярні виразяться в такий спосіб: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Вирази полярних координат через декартові:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\dfrac{y}{x} = tg\varphi$; (для знаходження кута φ потрібно враховувати знаки x і y і визначити квадрант, у якому знаходиться точка).

Приклад 1. Дані декартові координати точки $M(-2; 2)$.
Знайти її полярні координати. (Рис. 3.3)

Розв'язання. $\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $tg\varphi = \dfrac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$.

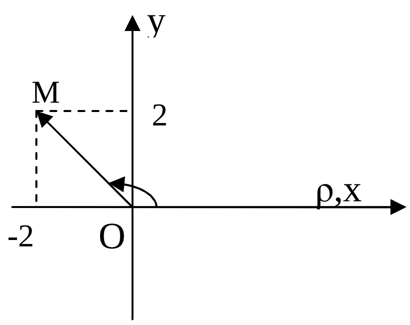


Рис. 3.3

Приклад 2. Скласти рівняння прямої в полярній системі координат.

Розв'язання.

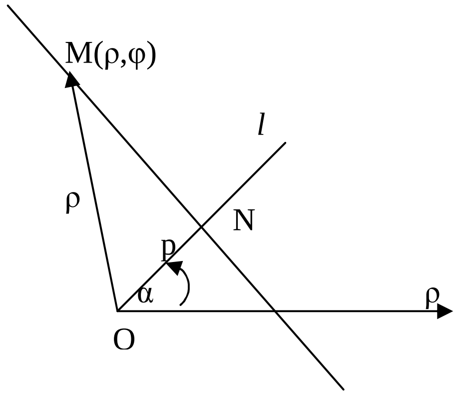


Рис. 3.4

Положення прямої на площині визначено, якщо задані її відстань p від полюса O і кут α між полярною віссю й променем l, що виходить із полюса перпендикулярно прямій (Рис. 3.4).

Очевидно, проекція $\overrightarrow{OM}$ на напрям l дорівнює p, тобто $np_l\overrightarrow{OM} = p$.

Позначаючи через ρ і φ координати довільної точки M прямої, запишемо: $p=\rho\cos(\varphi-\alpha)$, де кут $NOM=\varphi-\alpha$ або

$\rho = \dfrac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$ – це рівняння *прямої в полярних координатах*.

Зокрема, пряма $x=a$ у полярних координатах має рівняння $\rho\cos\varphi=a$ або $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, а пряма $y=b$ має рівняння $\rho\sin\varphi=b$, звідки $\rho = \dfrac{b}{\sin\varphi}$ полярне рівняння цієї прямої.

Рівняння кола в полярних координатах

Приклад 3.

Записати рівняння кола $x^2+y^2=R^2$ (Рис.3.5) у полярних координатах.

Розв’язання.

Оскільки $\rho^2=x^2+y^2$, то одержимо $\rho^2=R^2 \Rightarrow \rho=R$ – шукане рівняння кола в полярних координатах (Рис.3.6).

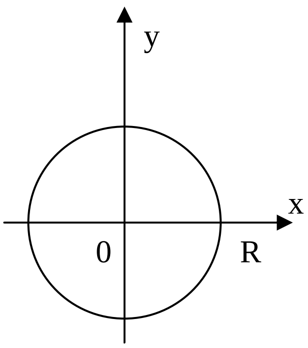


Рис.3.5

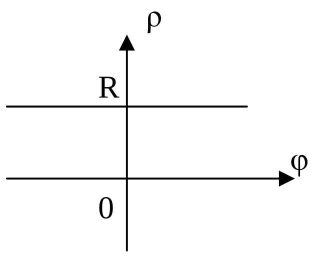


Рис.3.6

Приклад 4. Скласти полярне рівняння кола, зображеного на рис.3.7.

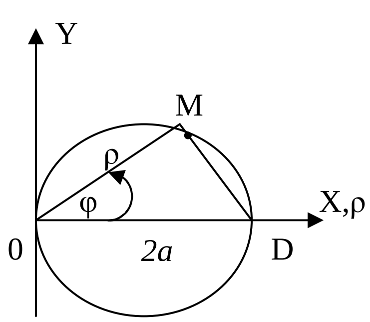


Рис. 3.7

Розв’язання. Нехай $M(\rho,\ \varphi)$ – довільна точка кола. З'єднаємо точку M з полюсом і з кінцевою точкою D діаметра, що проходить через полюс. $OM=\rho$, $<MOD=\varphi$, $OD=2a$.

Коло − це геометричне місце вершин прямих кутів, що опираються на його діаметр.

Отже, трикутник *OMD* – прямокутний. Звідси одержуємо $OM=OD\cdot \cos\varphi \Rightarrow$ $\rho=2a\cos\varphi$ – шукане рівняння кола.

3.2. Поверхні й лінії першого порядку. Площина й пряма

3.2.1. Площина

Поверхнею першого порядку *називається множина точок, координати яких у деякій декартовій системі координат задовольняють рівнянню*

$Ax+By+Cz+D=0,\ де\ A^2+B^2+C^2\neq 0$ (3.2. 1)

Можна показати, що *поверхня першого порядку є площина* й, обернено: площина описується рівнянням виду (3.2. 1), що називається *загальним рівнянням площини*.

Вектор $\vec{n}=(A,B,C)\neq 0$, перпендикулярний площині, називається *нормаллю* цієї площини.

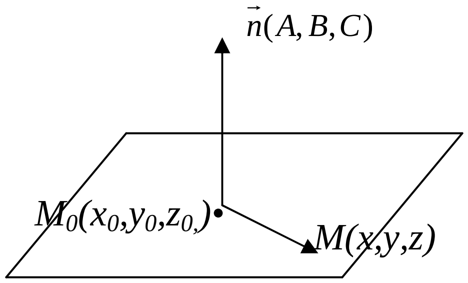


Рис. 3.8

Нехай задані нормальний вектор площини $\vec{n}=(A,B,C)$ і точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, що належить площини. Довільну точку площини позначимо *M(x, y, z)*, тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ – довільний вектор, що належить цієї площини й ортогональний нормальному вектору $\vec{n}$. З умови ортогональності векторів (рівність нулю скалярного добутку), одержимо рівняння площини:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. (3.2. 2)

Рівняння (3.2.2) може бути приведене до виду:

$Ax+By+Cz+D=0,$ (де $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$), (3.2. 3)

який називається *загальним рівнянням площини.*

Взаємне розташування площин

Взаємне розташування площин визначається взаємним розташуванням їх нормальних векторів.

1) *Кут* між площинами – це кут між їхніми нормальними векторами:

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}};.$$

2) Дві *площини* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ *паралельні*, якщо колінеарні їх нормалі, тобто виконуються умови:

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$; зокрема, якщо площини збігаються, то: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

3) *Умова перпендикулярності* площин: $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Рівняння площини у відрізках на осях.

Рівняння (3.2. 1) у випадку, коли $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$ можна записати у вигляді

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (3.2.\ 4)$$

де $a=-\frac{A}{D}, b=-\frac{B}{D}, c=-\frac{C}{D}$.– відрізки, що відтинаються площиною від осей координат. Отримане рівняння називається *рівнянням площини у відрізках на осях.*

Нормальне рівняння площини

Якщо як нормальний вектор узятий орт, тобто вектор одиничної довжини, то таке рівняння площини називається нормальним. З означення орта вектора випливає, що для переходу до нормального рівняння площини треба загальне рівняння площини розділити на $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, де $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=|\vec{n}|$.

Маємо норм*альне рівняння площини:*

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \qquad (3.2.\ 5)$$

Нормальним рівнянням площини зручно користуватися при обчисленні відстані від точки до площини.

Можна показати, *що відстань від т.* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *до площини дорівнює*

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.2.\ 6)$$

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки. $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$.

Нехай $M(x,y,z)$ довільна точка, що належить шуканій площині.

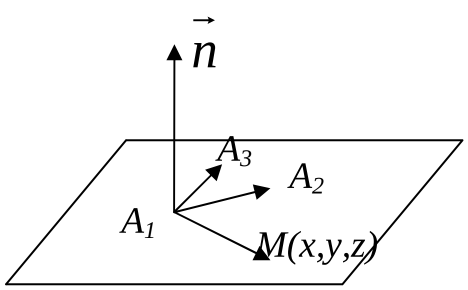


Рис. 3.9

Тоді вектори $\overrightarrow{A_1M}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ є компланарними, отже, їхній мішаний добуток дорівнює нулю, тобто ($\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}$)=0 або в координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.2.\ 7)$$

Приклад 2. Знайти відстань між паралельними площинами

x-2y+3z+7=0 й *x-2y+3z-1=0.*

Для цього досить взяти будь-яку точку на одній із площин й обчислити її відстань до іншої площини. Візьмемо в другій площині точку з координатами (1;0;0) і підставимо їх у формулу для обчислення відстані від точки до площини

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|1\cdot 1-2\cdot 0+3\cdot 0+7\right|}{\sqrt{14}}=\frac{8}{\sqrt{14}}\ .$$

.

3.2.2. Пряма лінія на площині

Лінією першого порядку на площині називається множина точок, координати яких у деякій декартовій системі координат задовольняють рівнянню $Ax+By+C=0,$ де $A^2+B^2\neq 0$.

Можна показати, що всяка лінія першого порядку на площині є пряма й навпаки.

Загальне рівняння прямої на площині має вигляд:

$$Ax+By+C=0\ . \qquad (3.2.\ 8)$$

Рівняння прямої, що проходить через т. $M_0\left(x_0,y_0\right)$ із заданим нормальним вектором $\vec{n}=\left(A,B\right)$ до цієї прямої:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$$

Рівняння прямої в «відрізках на осях».

Запишемо рівняння прямої в загальному виді $Ax+By+C=0$. Будемо вважати, що $A\neq 0,B\neq 0,C\neq 0$. Перетворимо вихідне рівняння: $Ax+By=-C$ $\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$. Позначимо $a=-\frac{C}{A},b=-\frac{C}{B}$, тоді *рівняння прямої в «відрізках на осях»* має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,. \qquad (3.2.\ 9)$$

Рівняння прямої на площині можна розглядати, як окремий випадок рівняння площини.

Взаємне розташування прямих визначається взаємним розташуванням їхніх нормальних векторів.

1) *Кут* між прямими – це кут між їхніми нормальними векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\ ;$$

2) Дві прямі $A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0$ *паралельні*, якщо колінеарні їх нормалі, тобто виконуються рівності:

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$; зокрема, якщо збігаються, то: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$;

3) *Умова перпендикулярності прямих*: $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=A_1A_2+B_1B_2=0$.

3.2.3. Пряма в просторі й на площині

Пряма в просторі може бути задана як лінія перетину двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.2.10)$$

Це загальні рівняння прямої лінії в просторі.

Пряма лінія на площині й пряма в просторі визначаються точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ й вектором $\vec{a}(m,n,p)$, колінеарним прямій, що називається *напрямним* вектором прямої (Рис.3.10).

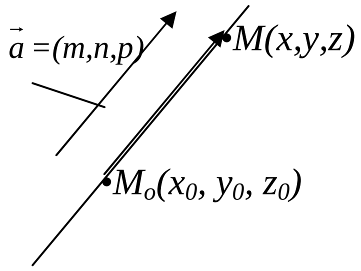


Рис. 3.10

Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка, що належить даній прямій. Напрямний вектор прямої $\vec{a} = (m,n,p)$ й вектор $\overrightarrow{M_0M}$ є колінеарними, тобто для них виконуються співвідношення:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (3.2.11)$$

які називаються *канонічними* рівняннями прямої в просторі.

Зокрема, на площині маємо:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (3.2.11^*)$$

Якщо покласти $\frac{x - x_0}{m} = t, \frac{y - y_0}{n} = t, \frac{z - z_0}{p} = t$, то одержимо *параметричні* рівняння прямої в просторі:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases} \qquad (3.2.12)$$

і відповідно на площині:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases} \qquad (3.2.12^*)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Якщо пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ й $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то як напрямний вектор можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, тоді одержимо *рівняння прямої в просторі, що проходить через 2 точки.*

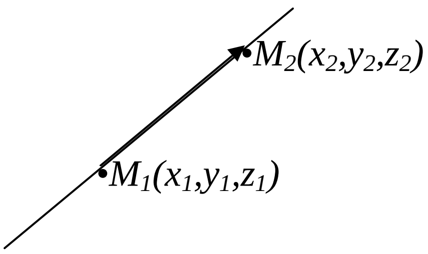


Рис. 3.11

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (3.2.13)$$

Аналогічно, $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (3.2.13*)

– *рівняння прямої*, що *проходить через 2 точки на площині*.(Рис.3.11)

Звідси, маємо $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$,

де $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$ – кутовий коефіцієнт прямої ,що проходить через 2 точки на площині.

Рівняння $y-y_0=k(x-x_0)$ (3.2.14)

називається *рівнянням прямої, що проходить через задану точку M_0 із заданим кутовим коефіцієнтом k.*

Кутовий коефіцієнт: $k=tg\alpha$, де α – кут нахилу даної прямої до осі *OX*.

Перетворимо дане рівняння $y=y_0+kx-kx_0$ => $y=kx+y_0-kx_0$ => $y=kx+b,$ де $b=y_0-kx_0,$ тоді одержимо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k.*

При *x=0* *y=b,* тобто *b* – ордината точки перетину прямої з віссю ординат.

Кут між прямими на площині

Кутом φ між прямими (1) і (2) на площині називають кут, на який треба повернути першу пряму проти годинникової стрілки до збігу із другою прямою, причому $0\le\varphi\le\pi$.

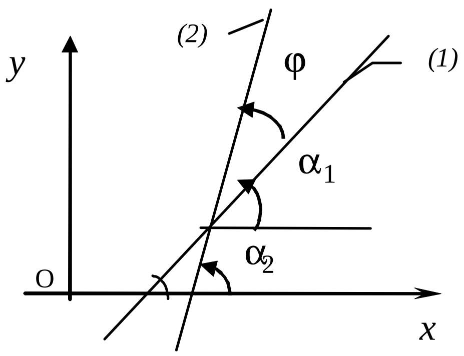


Рис.3.12

З рисунка видно, що $tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)$ $\Rightarrow\dfrac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2 tg\alpha_1}=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$; $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$ - тангенс *кута між двома прямими* $y=k_1x+b_1$ *й* $y=k_2x+b_2$ на площині. Формула $\varphi=arctg\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$ визначає гострий кут між прямими.

Умова паралельності прямих на площині: $k_2=k_1$.

Умова перпендикулярності: $1+k_2k_1=0\Rightarrow k_2=-\dfrac{1}{k_1}$.

Можна показати, що відстань від т. $M_0(x_0,y_0)$ до прямої *Ax+By+C*=0 дорівнює: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

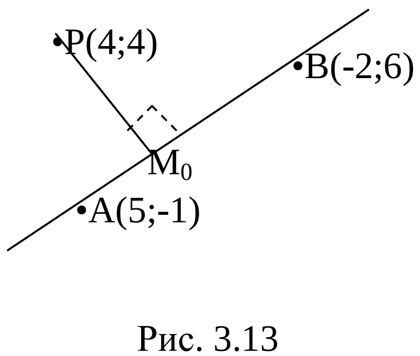


Рис. 3.13

Приклад 3. Знайти проекцію т. *P(4;4)* на пряму, що проходить через т. *A(5;-1)* і *B(-2;6).*

Розв’язання. Рівняння прямої, що проходить через точки *A* і *B*:

$\frac{x-5}{-2-5}=\frac{y+1}{6+1} \quad \Rightarrow x+y-4=0,\ k_1=-1.$

Тоді кутовий коефіцієнт прямої M_0P $k_2=1$.

Рівняння прямої M_0P: $y-4=1(x-4)$ або $y=x$. Розв'язуючи систему: $\begin{cases} y=x, \\ y=-x+4 \end{cases}$,

знаходимо координати т. $M_0(2;2)$.

Проекцією точки P на пряму AB є точка $M_0(2,2)$ (Рис. 3.13).

Рівняння пучка прямих на площині

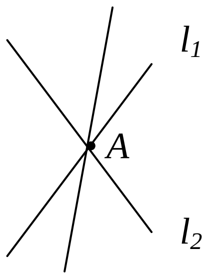


Рис. 3.14

Сукупність розміщених на даній площині прямих, що проходять через деяку точку A цієї площини, називається пучком прямих із центром у точці A (Рис. 3.14).

Центр пучка визначається системою рівнянь двох прямих:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \quad (l_1), \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \quad (l_2). \end{cases}$$

Теорема. Будь-яка пряма, що проходить через точку перетину прямих (l_1) і (l_2), визначається рівнянням:

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0.$

Змінюючи параметр λ можна одержати рівняння всіх прямих, що проходять через точку A, крім прямої (l_2).

Приклад. Через точку перетину прямих $2x+y-3=0$ й $x-y+8=0$ провести пряму, паралельну прямій $x+y+3=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння пучка прямих:

$2x+y-3+\lambda(x-y+8)=0$, кутові коефіцієнти яких залежно від λ визначаються виразом $k_1=\frac{2+\lambda}{\lambda-1}$.

Кутовий коефіцієнт прямої $x+y+3=0$ дорівнює $k_2=-1$.

З умови паралельності маємо: $k_1=k_2$ або $2+\lambda=-\lambda+1$, звідки $\lambda=-\frac{1}{2}$.

Таким чином, шукане рівняння прямої має вигляд $2(2x+y-3)-(x-y+8)=0$ або $3x+3y-14=0$.

Зауваження. Задачу можна розв'язати іншим способом, знайшовши точку перетину прямих (l_1) і (l_2).

Перехід від загальних рівнянь прямої в просторі до канонічних

Якщо пряма в просторі задана як лінія перетину двох площин

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \qquad (3.2.15)$$

то очевидно, що напрямний вектор $\vec{a}$ лінії перетину цих площин буде одночасно перпендикулярний до векторів $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ й $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$, а, отже, він буде колінеарний їхньому векторному добутку:

$$\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}.$$

Для визначення якої-небудь точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, що належить прямій потрібно розв'язати систему рівнянь (3.2.15), фіксуючи значення однієї зі змінних. Тоді канонічні рівняння прямої запишуться у вигляді

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

Взаємне розташування двох прямих у просторі

Взаємне розташування двох прямих у просторі визначається взаємним розташуванням їхніх напрямних векторів. Нехай дані дві прямі:
$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$, $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$, тоді *кут* між ними знаходиться за формулою

$$cos\varphi=\frac{\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1}|\cdot|\overrightarrow{a_2}|}\Rightarrow cos\varphi=\frac{m_1\cdot m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

Умова *паралельності*: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

Умова *перпендикулярності*: $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Умова *перетину прямих* у просторі

$$\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}=0,$$

це умова компланарності напрямних векторів прямих і вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$ – точки, що належать першій і другій прямій відповідно.

Кут між прямою $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ й площиною $Ax+By+Cz+D=0$ дорівнює гострому куту між прямою і її проекцією на площину й знаходиться за формулою:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Умови *належності* прямої площині. $\begin{cases}mA+nB+pC=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,\end{cases}$

де перша умова виражає перпендикулярність векторів (m, n, p) і (A, B, C), а друга –належність площині т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ прямої.

Приклад 5. Дані координати вершин піраміди $A_1(2;-1;1)$, $A_2(5;5;4)$, $A_3(3;2;-1)$, $A_4(4;1;3)$. Знайти:

1) Довжину ребра A_1A_2:

$\overrightarrow{A_1A_2}=(5-2;\ 5-(-1);\ 4-1)=(3;\ 6;\ 3);$

Довжина ребра A_1A_2 дорівнює $\left|\overline{A_1A_2}\right|=\sqrt{3^2+6^2+3^2}=\sqrt{54}$.

2) Кут між ребрами A_1A_2 й A_3A_4:

$\overline{A_3A_4}=(1;\ -1;\ 4)$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_3A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\left|\overline{A_3A_4}\right|}=\frac{3\cdot1+6(-1)+3\cdot4}{\sqrt{54}\sqrt{1^2+1^2+4^2}}=\frac{9}{9\cdot2\sqrt{3}}.;\ \alpha=\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

3) Проекцію вектора $\overline{A_1A_3}$ на напрям вектора $\overline{A_1A_4}$:

$$\text{Пр}_{\overline{A_1A_4}}\overline{A_1A_3}=\frac{\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_4}\right|};\ \overline{A_1A_3}=(1;3;-2)\ ;\qquad \overline{A_1A_4}=(2;2;2)$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3};\ np_{\overline{A_1A_4}}A_1A_3=\frac{1\cdot2+3\cdot2-2\cdot2}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

4) Площа грані $A_1A_2A_3$:

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|,\qquad \left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&6&3\\1&3&-2\end{vmatrix}=-21\vec{i}+9\vec{j}+3\vec{k};$$

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sqrt{21^2+9^2+3^2}=\frac{1}{2}\sqrt{531}\ \text{(кв. од.)}.$$

5) Об'єм піраміди:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)\right|,$$

$$\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)=\begin{vmatrix}3&6&3\\1&3&-2\\2&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0&0\\1&1&-3\\2&-2&0\end{vmatrix}=-18\qquad V=\frac{18}{6}=3\ \text{(куб. од)}.$$

6) Рівняння прямої A_1A_2:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-1}{3}\ \text{або}\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

7) Рівняння площини $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix}x-2&y+1&z-1\\3&6&3\\1&3&-2\end{vmatrix}=0\qquad \text{або}\quad -21(x-2)+9(y+1)+3(z-1)=0,$$

$$-7(x-2)+3(y+1)+z-1=0,\qquad -7x+3y+z+16=0.$$

8) Рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

Нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$: $\vec{n}=(-7;3;1)$, тоді рівняння шуканої висоти мають вигляд $\dfrac{x-4}{-7}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$

9) Кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.

Маємо $\overrightarrow{A_1A_4}$=(2;2;2), $\vec{n}=(-7;3;1)$, тоді

$$\sin\varphi=\frac{|2\cdot(-7)+2\cdot 3+2\cdot 1|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\sqrt{7^2+3^2+1^2}}=\frac{6}{2\sqrt{3}\sqrt{59}}=\sqrt{\frac{3}{59}}\,;\varphi=\arcsin\sqrt{\frac{3}{59}}.$$

Рівняння пучка площин

Теорема. *Будь-яка площина, що проходить через лінію перетину площин (α_1) і (α_2), де:*
(α_1): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,
(α_2): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, *визначається рівнянням:*
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$.

Приклад 6. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму (l_1), що є лінією перетину площин паралельно прямій (l_2).

$$(l_1):\ \begin{cases}3x-y+z-5=0,\\ x+2y-z+2=0.\end{cases}\qquad (l_2):\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}.$$

Розв'язання. Рівняння пучка площин, що проходять через пряму (l_1), має вигляд

$3x-y+z-5+\lambda(x+2y-z+2)=0$ або $(3+\lambda)x+(2\lambda-1)y+(1-?)z-5+2?=0$;
Із цього пучка вибираємо площину, паралельну прямій (l_2).
З умови паралельності площини й прямої одержимо:
$(3+\lambda)(-1)+(2\lambda-1)2+(1-\lambda)2=0$, звідки $\lambda=3$.

Підставляючи це значення λ у рівняння пучка площин, одержимо: $6x+5y-2z+1=0$ – рівняння шуканої площини.

3.3. Лінії другого порядку

3.3.1. Класифікація ліній другого порядку

Лінією (кривою) другого порядку на площині називається множина точок, координати яких у деякій системі декартових координат задовольняють рівнянню

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (3.3.1)$$

де $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

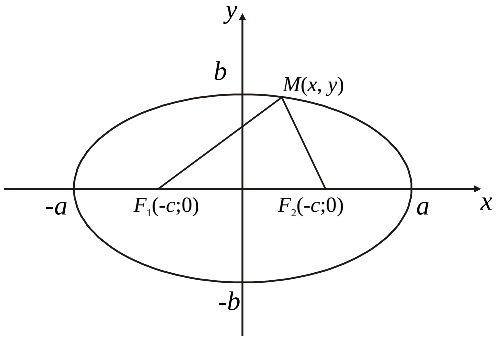
Класифікація кривих другого порядку:

1. $AC-B^2>0$ – крива еліптичного типу (еліпс, уявний еліпс);
2. $AC-B^2<0$ – крива гіперболічного типу (гіпербола, пара прямих, що перетинаються);
3. $AC-B^2=0$ – крива параболічного типу (парабола, пара паралельних прямих);

Застосовуючи перетворення повороту системи координат, можна одержати рівняння, що не містить добутку xy. Методом виділення повних квадратів і паралельним переносом системи координат можна привести рівняння кривої другого порядку до, так називаного, *канонічному виду*.

Розглянемо найпростіші (канонічні) рівняння ліній другого порядку.

3.3.2. Еліпс



*Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох даних точок, називаних фокусами, є величина постійна (*звичайно позначувана *2a)*. Введемо декартову систему координат, так щоб вісь *Ox* проходила через фокуси F_1 й F_2, а вісь *Oy* ділила відрізок F_1F_2 навпіл (Рис. 3.15),

Рис. 3.15

тоді: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3.3.\ 2)$$

– канонічне рівняння еліпса,

де a й b півосі еліпса. Якщо $a>b$, то фокуси розташовані на осі *OX*, як показано на даному малюнку.

Має місце наступне співвідношення: $c^2=a^2-b^2$, де $2c$ – відстань між фокусами.

Якщо $b>a$, то фокуси розташовані на осі *OY* й $c^2=b^2-a^2$.

Точки $(a,0)$,$(0,b)$,$(-a,0)$,$(0,-b)$ – вершини еліпса.

Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі еліпса, називається *ексцентриситетом* еліпса $\varepsilon=\frac{c}{a}$ (або $\varepsilon=\frac{c}{b}$).

Ексцентриситет еліпса характеризує ступінь витягнутості еліпса, причому для еліпса $\varepsilon<1$. Зокрема, для кола $\varepsilon=0$, тобто $a=b$ і рівняння кола із центром на початку координат має вигляд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2=a^2$.

Приклад 1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його більша вісь дорівнює 20, а ексцентриситет 3/5.

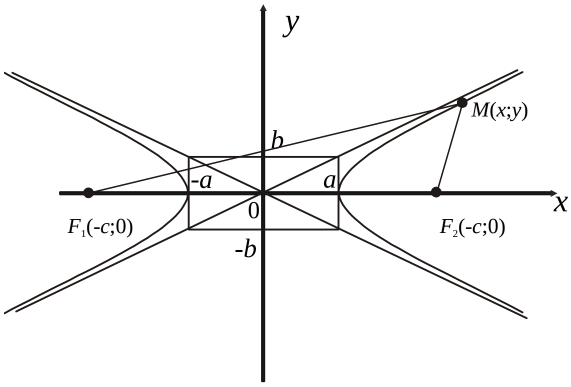
Розв’язання. За умовою $2a=20$, $\varepsilon=3/5$. Тоді $a=10$, а відповідно до формули $\varepsilon=\frac{c}{a}\Rightarrow c=a\cdot\varepsilon=10\cdot\frac{3}{5}=6$. Зі співвідношення $b^2=a^2-c^2$ знаходимо $b^2=100-36=64$.

Підставляючи $a^2=100$, $b^2=64$ у рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, одержимо $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ – шукане рівняння еліпса.

3.3.3. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, називаних фокусами, є величина постійна (звичайно позначувана *2a)*.

Якщо декартову систему координат розташуємо так само, як у випадку еліпса, то одержимо *канонічне рівняння гіперболи* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (Рис.3.16).



Гіпербола, у якої фокуси розташовані на осі *OY*, називається *спряженою* і її рівняння: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$. Числа *a* й *b* є величини дійсної й уявної півосей гіперболи. Вони зв'язані між собою рівністю: $c^2=a^2+b^2$

Рис. 3.16

Точки (a,0) і (-a,0) називаються *вершинами гіперболи*.

Відношення половини фокусної відстані до довжини дійсної півосі називається *ексцентриситетом* гіперболи $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ($\varepsilon=\frac{c}{b}$ – для спряженої гіперболи). Очевидно, що для гіперболи $\varepsilon>1$.

Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ називаються *асимптотами* гіперболи. Якщо *a*=*b*, то гіпербола називається *рівнобічною.*

Приклад 2. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами *2c=10*, а ексцетриситет $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

Розв'язання. За умовою задачі фокуси розташовані на осі ординат, тому напишемо канонічне рівняння спряженої гіперболи у вигляді: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

Параметри *a* й *b* знаходимо із системи: $\begin{cases} a^2+b^2=c^2, \\ \varepsilon=\frac{c}{b}. \end{cases}$

Підставляючи с=*5* й $\varepsilon=\frac{5}{3}$, одержимо:

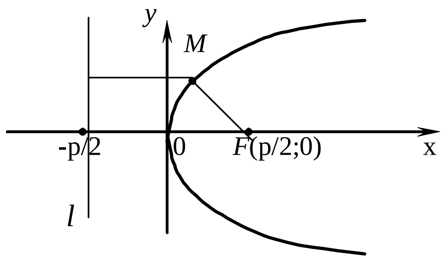
$\begin{cases} a^2+b^2=25, \\ \frac{5}{b}=\frac{5}{3}. \end{cases}$ Із другого рівняння системи знаходимо *b*=*3*,

тоді $a^2=25-9=16;$

Отже, рівняння гіперболи: $\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{4^2}=1$.

3.3.4. Парабола

Параболою називається геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки, називаної фокусом, і даною прямою, називаною директрисою.



Виберемо систему координат так, як зображено на рисунку 3.17. Тоді канонічне рівняння параболи запишеться як $y^2 = 2px$, де p – параметр параболи, чисельно рівний відстані від фокуса до директриси.

Канонічне рівняння параболи, фокус якої знаходиться на осі OY має вигляд: $x^2 = 2py$.

Рис. 3.17

$x=-\frac{p}{2}$ ($y=-\frac{p}{2}$) – *рівняння директриси.*

Відзначимо, що поняття директриси визначене також для еліпса й гіперболи, тільки ці криві мають по дві директриси, рівняння яких: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ ($y=\pm\frac{a}{\varepsilon}$). Це прямі, перпендикулярні фокальній осі й розташовані поза вершинами у випадку еліпса $\left(\varepsilon<1 \Rightarrow |x|>a\right)$ й між вершинами у випадку гіперболи $\left(\varepsilon>1 \Rightarrow |x|<a\right)$. При цьому праву директрису вважають відповідною правому фокусу кривої, а ліву - лівому фокусу.

3.3.5. Фокально-директоріальна властивість

Має місце так називана *фокально-директоріальна властивість* кривих другого порядку: *відношення відстані будь-якої точки $M(x,y)$ кривої до фокуса (r) до відстані тієї ж точки до відповідної цьому фокусу директриси (d_M) є величина стала, рівна ексцентриситету:* $\frac{r_M}{d_M}=\varepsilon$.

Ексцентриситет параболи, як випливає з її означення, дорівнює 1.

3.3.6. Рівняння еліпса, гіперболи, параболи, паралельно зміщених щодо осей координат

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – *еліпс*, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – *гіпербола,*

$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$ – *спряжена гіпербола*, $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ або $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$ – *парабола*.

У всіх випадках паралельним переносом осей координат: $X=x-x_0; Y=y-y_0$ рівняння приводяться до канонічного виду.

Приклад 2**.** Привести рівняння до канонічного виду й побудувати криву.

$$4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки й виділимо повні квадрати

$$\left(4x^2-40x\right)+\left(9y^2+36y\right)+100=0, 4\left(x^2-10x\right)+9\left(y^2+4y\right)+100=0,$$

$$4\left(x^2-10x+25\right)-100+9\left(y^2+4y+4\right)-36+100=0, 4\left(x-5\right)^2+9\left(y+2\right)^2=36,$$

$$\frac{\left(x-5\right)^2}{9}+\frac{\left(y+2\right)^2}{4}=1.$$

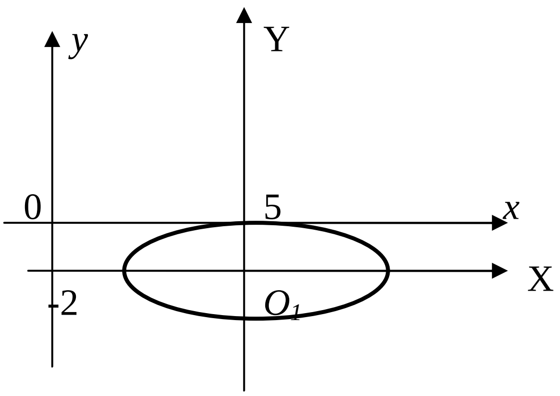


Рис.3.18

Виконуючи перетворення паралельного переносу осей з новим початком координат $O_1\left(5;-2\right)$: *x-5=X*, *y+2=B*, одержимо рівняння виду $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$. Це рівняння еліпса з півосями *a=3*, *b=2*. Будуємо криву в системі координат XO_1Y.

3.4. Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору, що у декартовой системі координат задається рівнянням $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Kx+Ly+Mz+N=0$, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля.

Невироджені поверхні 2-го порядку: циліндри, конуси, еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди.

Вироджені поверхні 2-го порядку: порожня множина, точка, площина, пара паралельних площин або площин, що перетинаються. Такі поверхні нижче не розглядаються.

Далі приводяться канонічні рівняння й малюнки невироджених поверхонь другого порядку в деякій фіксованій декартовій системі координат.

Циліндричні поверхні

Нехай на площині XOY лежить деяка крива L, що має рівняння $F(x,y)=0$ (3.4. 1)

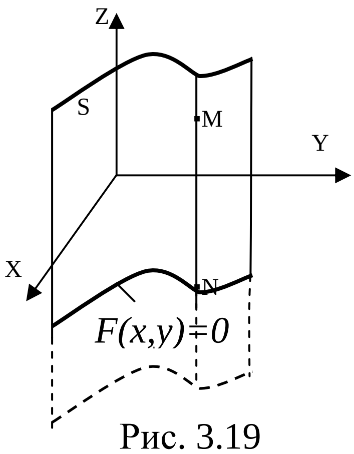


Рис. 3.19

Проведемо через точку $N(x,y,0)$ пряму, паралельну осі OZ. Множина цих прямих утворить поверхню S (Рис.3.19), що називається *циліндричною поверхнею*. Лінія L називається *напрямною*, а прямі, що утворять циліндричну поверхню, рухаючись по напрямній L, називаються *утворюючими*.

На рисунку зображена циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі OZ і напрямною L у площині XOY.

Візьмемо на поверхні S довільну точку $M(x,y,z)$. Ця точка лежить на якій-небудь твірній. Якщо N – точка перетину цієї твірної із площиною XOY, то точка N належить кривій L. Звідси витікає, що координати точки M задовольняють рівнянню (3.4. 1) і рівняння поверхні S збігається з рівнянням напрямної: S: $F(x,y)=0$.

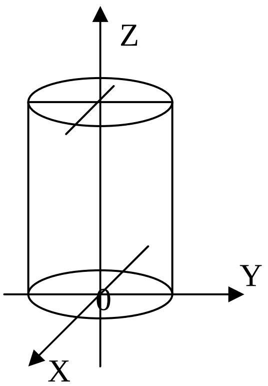


Рис. 3.20

Зокрема, якщо напрямною є еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то циліндрична поверхня називається *еліптичним циліндром.*

Прямий еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Рис. 3.20). Зокрема, при $a=b$ одержимо рівняння *прямого кругового циліндра:* $x^2+y^2=a^2$.

Якщо напрямною є парабола, то маємо *параболічний циліндр* $y^2=2px$ ($x^2=2py$)(рис 3.21).

Якщо напрямна лінія – гіпербола, то циліндрична поверхня – *гіперболічний циліндр* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (Рис.3.22).

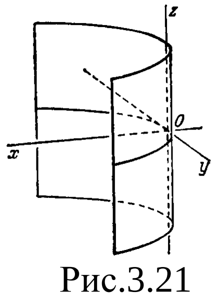


Рис.3.21

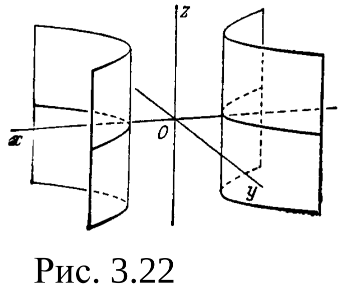
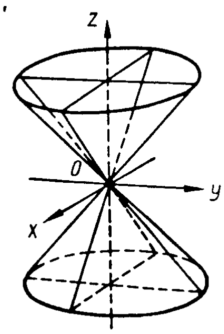


Рис. 3.22

Далі приведемо малюнки поверхонь другого порядку і їхнього рівняння в декартовій системі координат без аналітичного обґрунтування. Однак, розглядаючи перетин даних поверхонь координатними площинами й площинами паралельними координатним площинам, можна переконатися у відповідності геометричного зображення поверхонь й їхніх рівнянь.



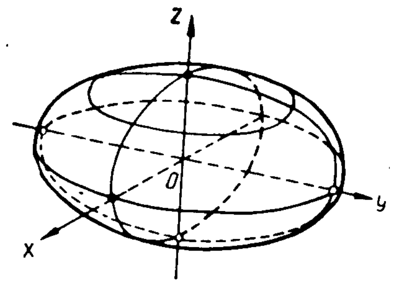
Еліптичний конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ (Рис.3.23).

Зокрема, при $a=b$ одержимо рівняння прямого кругового конуса.

Рівняння *тривісного еліпсоїда:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (Рис. 3.24).

При $a=b=c$ одержимо *сферу:* $x^2+y^2+z^2=a^2$ (Рис. 3.25).

Рис. 3.23



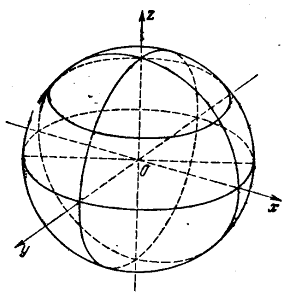
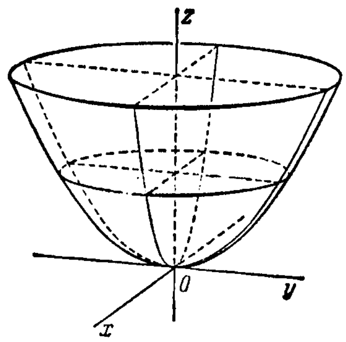


Рис. 3.24

Рис. 3.25



Еліптичний параболоїд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z;$

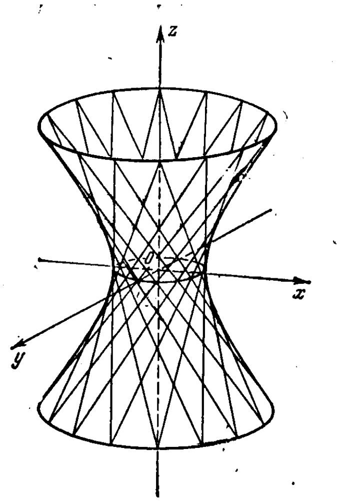
(Рис. 3.26)

Параболоїд обертання (a=b): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=2z.$

Однопорожнинний гіперболоїд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Рис. 3.27).

Рис. 3.26

Двопорожнинний гіперболоїд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (Рис. 3.28).



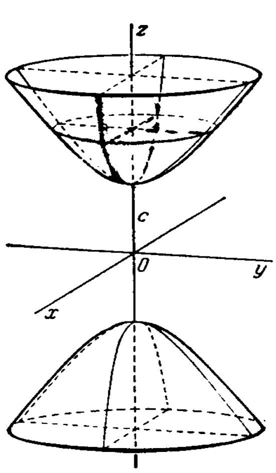


Рис. 3.27

Рис. 3.28

Гіперболічний параболоїд: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$; (Рис. 3.29(а), 3.29(б)).

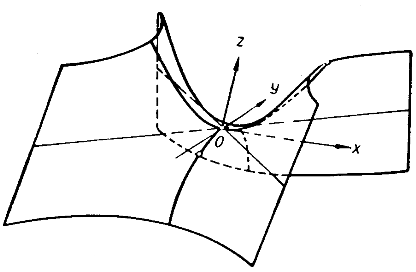


Рис. 3.29(а)

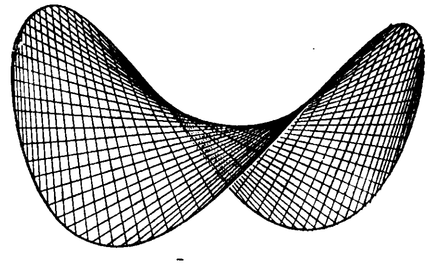


Рис. 3.29(б)

Контрольні завдання до розділу 3

Завдання 1. Задано координати вершин трикутника ABC. Способами аналітичної геометрії :
1) скласти рівняння сторони АВ; 2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини С; 3) обчислити довжину висоти, проведеної з вершини В; 4) скласти рівняння прямої, що проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні АС; 5) знайти площу трикутника; 6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині А.

Номер варіанта	A	B	C	Номер варіанта	A	B	C
3.1.1	(-6;-3)	(-4;3)	(9;2)	3.1.16	(2;-1)	(8;7)	(-10;4)
3.1.2	(-3;1)	(-1;7)	(12;6)	3.1.17	(5;-3)	(1;0)	(7;2)
3.1.3	(-1;3)	(1;9)	(4;7)	3.1.18	(4;-6)	(2;2)	(-2;-1)
3.1.4	(0;0)	(2;6)	(7;2)	3.1.19	(3;4)	(-1;7)	(-4;0)
3.1.5	(-2;-6)	(0;0)	(3;-2)	3.1.20	(1;-2)	(7;6)	(0;2)
3.1.6	(-2;-5)	(6;2)	(0;0)	3.1.21	(2;-1)	(-2;-3)	(-6;4)
3.1.7	(-2;0)	(-4;-7)	(5;5)	3.1.22	(5;-8)	(3;-2)	(-3;-6)
3.1.8	(1;2)	(3;8)	(-4;-1)	3.1.23	(8;-2)	(-6;-5)	(0;4)
3.1.9	(4;4)	(1;-3)	(9;0)	3.1.24	(7;5)	(3;2)	(4;0)
3.1.10	(5;6)	(7;2)	(-6;0)	3.1.25	(3;-7)	(6;0)	(1;1)
3.1.11	(-6;-4)	(-1;2)	(6;1)	3.1.26	(5;3)	(-1;-2)	(-3;7)
3.1.12	(2;0)	(7;2)	(0;5)	3.1.27	(3;1)	(-2;8)	(-5;3)
3.1.13	(-2;-6)	(-6;-3)	(10;-1)	3.1.28	(9;2)	(-5;7)	(0;-3)
3.1.14	(8;2)	(-2;1)	(-4;7)	3.1.29	(-3;3)	(3;1)	(-1;4)
3.1.15	(2;-4)	(-2;-1)	(4;1)	3.1.30	(7;9)	(-2;0)	(-3;2)

Завдання 2. Привести рівняння лінії до канонічного вигляду, побудувати цю лінію і знайти в залежності від отриманого результату:

а) координати центру кола і його радіус; б) координати фокусів, довжини осей і ексцентриситет еліпса; в) координати фокусів, довжини осей, ексцентриситет гіперболи і записати рівняння її асимптот; г) координати вершини і фокуса параболи, параметр, а також записати рівняння її директриси.

Номер варіанта	Рівняння	Номер варіанта	Рівняння
3.2.1	$9x^2+4y^2-18x-8y-23=0$	3.2.16	$x^2-y^2-6x+4y+6=0$
3.2.2	$3y^2+5x+6y+13=0$	3.2.17	$x^2+x+2y-1=0$
3.2.3	$x^2+4x+3y=0$	3.2.18	$x^2-2y+6x+1=0$
3.2.4	$2y^2-4y+5x=0$	3.2.19	$3x^2-2y+6x+1=0$
3.2.5	$4x^2-y^2-2y-5=0$	3.2.20	$3x^2+y+6x=0$
3.2.6	$2x^2-8x-y=0$	3.2.21	$3y^2+3y+2x=0$
3.2.7	$x^2+2y^2+4y-6=0$ $4y^2-8y+x=0$	3.2.22	$3y^2+3y+2x+2=0$
3.2.8	$y^2-2x+4y+2=0$	3.2.23	$4x^2+y^2+8x-2y-11=0$
3.2.9	$y+x^2+2x=0$	3.2.24	$x^2+6x-2y+1=0$
3.2.10	$4x^2+16y^2+24x-28=0$	3.2.25	$2y-5x^2+10x=0$
3.2.11	$4y^2+2x+8y+1=0$	3.2.26	$x^2+6x+2y=0$
3.2.12	$3x^2+12x+16y-12=0$	3.2.27	$5y^2+10y+x=0$
3.2.13	$x^2-y^2+x-y+1=0$	3.2.28	$4x^2+8x-y=0$
3.2.14	$3y^2-12x-6y+11=0$	3.2.29	$y=8x-2x^2-5$
3.2.15	$10x-5x^2-2y+3=0$	3.2.30	$x^2-4y^2+6x+16y-11=0$

РОЗДІЛ 4

ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1. Основні означення й поняття математичного аналізу

4.1.1. Елементи теорії множин

Поняття множини в математиці є первинним. Під *множиною* розуміють сукупність об'єктів, об'єднаних деякою спільною ознакою. Множини позначають заголовними буквами: $A, B, C, X, Y,\dots$

Загальноприйняті позначення деяких множин:

Множина *натуральних* чисел позначається – $\boldsymbol{N}$;

Множина *цілих* чисел позначається – $\boldsymbol{Z}$;

Множина *раціональних* чисел позначається – $\boldsymbol{Q}$;

Множина *дійсних* чисел позначається – $\boldsymbol{R}$.

Елементи множин – малими буквами: $a, b, c, x, y,\dots..$

Для позначення належності елемента a множині A вживається символічний запис $a\in A$. Якщо a не належить множині A, то пишуть $a\notin A$.

Множини A и B рівні, якщо вони складаються з тих самих елементів.

Запис $A=\{a, b, c\}$ означає, що множина A складається з елементів a, b, c. Якщо множина складається з елементів, що мають певну властивість, наприклад, множина дійсних чисел x, що задовольняють нерівностям $a\le x\le b$, то означення цієї множини записують у такий спосіб: $[a, b]=\{x: a\le x\le b\}$.

Множина, що не містить елементів (порожня множина), позначається символом $\varnothing$.

Якщо кожен елемент множини A належить множині B, то говорять, що множина A є підмножиною B и позначають $A\subseteq B$.

Для стислості запису основних понять використовуються ***квантори:***

1. $\in$ – символ належності.
2. $\forall x$, що означає " для всіх x", "для кожного x", "для будь-якого x" або "яке б не було x".
3. $\underset{x}{\exists}$ або $\exists x$ означає "існує таке x, що " або "можна знайти таке x, що" або "принаймні для одного x ".
4. $\exists! x$ означає "існує єдиний x ".

Дії над множинами:

1. *Сума.* Множина, елементи якої належать хоча б одній із множин A або B, називається їхнім *об'єднанням (сумою):* $C = A\cup B$.
2. *Різниця.* Різницею множин A и B називається множина C, що складається з елементів A, що не належать B: .
3. *Добуток.* Множина, елементи якої належать A і B одночасно, називається їх *перетином:* $C = A\cap B$.

Множина, елементами якої є дійсні числа, називається *числовою.* Розрізняють наступні числові множини: *відрізок*, сегмент або замкнутий проміжок :$[a,b]=\{x\in R | a\le x\le b\}$; відкритий проміжок або *інтервал*:

$(a,b)=\{x\in R|\ a<x<b\}$; *півінтервали* $[a,b)=\{x\in R|\ a\le x<b\}$ або $(a,b]=\{x\in R|\ a<x\le b\}$; нескінченні інтервали й півінтервали $(a,+\infty)$; $(-\infty,a)$; $(-\infty,+\infty)$; $[a,+\infty)$; $(-\infty,a]$.

Будь-який інтервал (α,β), *що* містить точку *x*, тобто $\alpha<x<\beta$, називається *околом точки x.* Нехай ε – яке-небудь додатне число, тоді ε-*околом* точки *x* називається інтервал $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$. В ε-околі кінці симетричні відносно *x*, чого може й не бути у випадку довільного околу. Точка *x* називається *внутрішньою* точкою множини, якщо вона належить йому разом з деяким своїм околом. Точка *x, що* належить або не належить множині, називається *граничною* точкою множини, якщо будь-який окіл містить як точки, що належать множині, так і точки йому не належать.

Числова множина *A* називається *обмеженою зверху (знизу),* якщо існує таке дійсне число *M* (m), що $\forall\ x\in A$ виконується нерівність $x\le M$ $(x\ge m)$.

Числова множина *A* називається *обмеженою,* якщо вона *обмежена зверху й знизу,* тобто якщо існує таке додатне число *M,* що $\forall\ x\in A$ справедливо $|x|\le M$.

4.1.2. Модуль дійсного числа

Модуль дійсного числа визначається таким чином $|x|=\begin{cases}x, \text{ якщо } x\ge 0,\\ -x, \text{якщо } x<0.\end{cases}$

З означення випливає, що $|x|\ge 0$, $|x|\ge x$ і $|-x|=|x|$ $\forall\ x\in R$.

Наприклад, |-5|=5, |5|=5.

Основні властивості модуля:

1) $|\alpha x|=|\alpha||x|$; де α=const,

2) якщо $|x|\le a,\ \ a>0$, та нерівність рівносильна двом нерівностям $-a\le x\le a$,

3) якщо $|x-a|<\varepsilon$, тобто $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ ($x\in\varepsilon$ - околу точки *a*)**,** то змінна *x* задовольняє нерівностям $-\varepsilon+a<x<\varepsilon+a$,

4) $|x+y|\le|x|+|y|$,

5) $|x-y|\ge|x|-|y|$,

6) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$,

7) $|x/y|=|x|/|y|$.

4.1. 3. Поняття функції

Якщо кожному значенню змінної *x*, що належить деякій області її зміни *X* ($x\in X$), за деяким правилом або законом поставлено у відповідність одне певне значення $y\in Y$, то говорять, що на множині *X* задана функція $y=f(x)$. Множина *X* називається *областю визначення* функції; множина *Y* - *областю значень* функції. При цьому *x* називається *незалежною змінною* або *аргументом*, *y – функцією.*

Якщо кожному значенню змінної $x \in X$ відповідає не одне, а кілька значень $y \in Y$ (і навіть нескінченна множина їх), то функція називається *багатозначною,* на відміну від *однозначної* функції, визначеної вище. Функція $y = f(x)$ називається *обмеженою* зверху (знизу), або просто обмеженою, якщо відповідною властивістю володіє її множина значень.

Основні властивості функцій.

Парність. Функція $y = f(x)$ називається: *парною,* якщо $f(-x) \equiv f(x)$ (рис. 4.1); — *непарною,* якщо $f(-x) \equiv -f(x)$ (рис 4.2); інакше функція називається функцією *загального вигляду.*

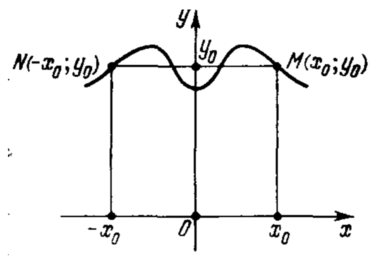


Рис.4.1

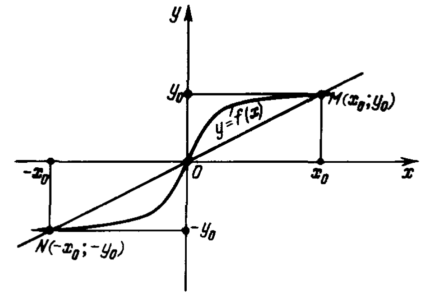
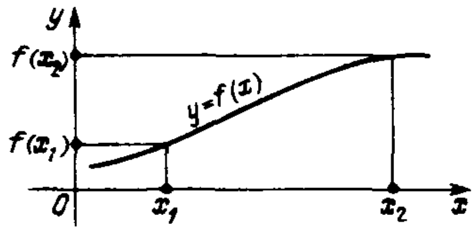


Рис.4.2

Періодичність. Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо $\exists\ T > 0$ таке, що $f(x+T) \equiv f(x), \forall\, x \in X$. Найменше число *T*, що має зазначену властивість, називається періодом.

Монотонність. Функція $y = f(x)$ називається на множині *X монотонно зростаючою* (*монотонно спадаючою*), якщо $\forall\, x_1, x_2 \in X$, що задовольняють умові $x_2 > x_1$, справедлива нерівність $f(x_2) > f(x_1)$; ($f(x_2) < f(x_1)$) (рис. 4.3 й 4.4), *незростаючою* (*неспадаючою),* якщо при $x_2 > x_1$, $f(x_2) \le f(x_1)$, ($f(x_2) \ge f(x_1)$).



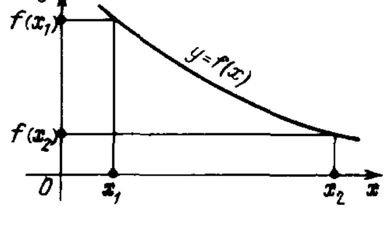


Рис. 4.3 Рис. 4.4

Якщо y є функцією від u, $y = F(u)$, а u у свою чергу залежить від змінної x , $u = \varphi(x)$, то функція $y = F\left[\varphi(x)\right]$ називається *складною* функцією або *суперпозицією*.

Елементарною функцією називається функція, отримана з основних елементарних функцій за допомогою суперпозиції цих функцій і скінченного числа арифметичних операцій.

До класу елементарних належать також *гіперболічні* ***функції*:**

Гіперболічний синус $sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; (Рис. 4.5)

Гіперболічний косинус $ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; (Рис. 4.6)

Гіперболічний тангенс $th\,x = \dfrac{sh\,x}{ch\,x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

Гіперболічний котангенс $cth\,x = \dfrac{ch\,x}{sh\,x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Гіперболічні функції зв'язані співвідношеннями, аналогічними тригонометричним: $ch^2 x - sh^2 x = 1$; $th\,x \cdot cth\,x = 1$.

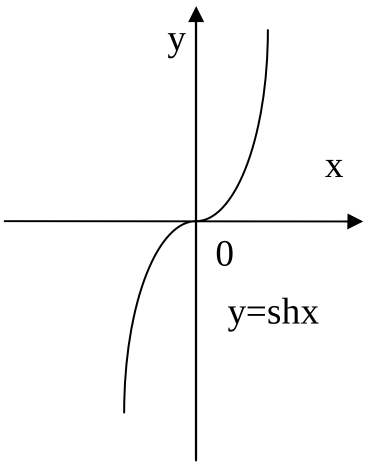


Рис. 4.5

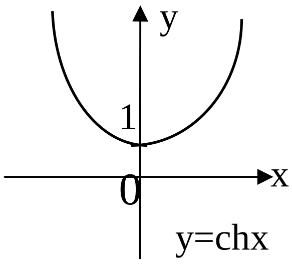


Рис. 4.6

4.2. Границя числової послідовності

Одним з основних понять математичного аналізу є поняття границі. Почнемо вивчення з найпростішої операції граничного переходу, заснованої на понятті границі числової послідовності.

Означення. Нехай кожному числу n натурального ряду чисел *1, 2…,n, …* ставиться у відповідність за певним законом деяке дійсне число x_n, тоді множина занумерованих дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ називається числовою послідовністю або просто послідовністю. Скорочено послідовність позначається символом $\{x_n\}$ або *(*x_n*)*. Наприклад, символ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ позначає послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, а символ $\{ (-1)^n\, 2^n \}$ позначає послідовність: *-2, 4, -8, 16, …* .

Числова послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує таке дійсне число M *(*m *)*, що $\forall$ n виконується нерівність $x_n \le M$ $(x_n \ge m)$.

Числова послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою, якщо вона обмежена зверху й знизу, тобто якщо $\forall$n справедливо $m \le x_n \le M$, або якщо існує таке додатне число *N*, що $\forall\, n$ справедливо $|x_n| \le N$.

Означення. Число α називається границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо для кожного наперед заданого додатного числа ε можна вказати такий номер $N(\varepsilon)$, що всі значення x_n, $\forall\ n > N$, будуть задовольняти нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$.

Якщо число α є границя числової послідовності $\{x_n\}$, то говорять, що x_n наближається до границі a і пишуть $x_n \to a$ або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, або $\lim x_n = a$.

Нехай кожному значенню змінної x_n поставлена у відповідність точка на числовій осі. Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ запишемо як подвійну нерівність $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ задовольняє множина точок, що належать інтервалу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, який називається ε- околом точки *a*.

Тоді геометрична інтерпретація границі може бути такою.

Число *a* є границя змінної x_n, якщо для кожного наперед заданого як завгодно малого додатного числа ε всі значення змінної x_n, починаючи з деякого номера *N*, будуть знаходитись в ε- околі точки *a*. Поза цим інтервалом може знаходитись тільки скінченне число елементів послідовності.

Числова послідовність, що має скінченну границю, називається збіжною, а не має скінченної границі - розбіжною.

Кажуть, що числова послідовність $\{x_n\}$ наближається до нескінченної границі, якщо для кожного як завгодно великого додатного числа *M*, можна знайти таке N, що $\forall n > N$, має місце нерівність $|x_n| > M$ і пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. У цьому випадку послідовність називається нескінченно великою.

4.3. Границя функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$, крім, може бути, самої точки a.

Число А називається границею функції $y = f(x)$ *при* $x \to a$, *якщо для будь-якого як завгодно малого додатного* ε *знайдеться таке* $\delta > 0$, *що для всіх* x *(крім, може, точки* a*), що задовольняють нерівності* $|x - a| < \delta$, *виконується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *і записують* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Це означення називається означенням границі функції в точці мовою «ε - δ».

4.3.1. Геометричне означення границі функції в точці

Який би не був ε-окіл числа A існує такий δ-окіл числа a, що $\forall\ x \in (a - \delta, a + \delta)$ значення $y \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Означення границі узагальнюється на випадок, коли $x \to \pm\infty$ оскільки у означенні a й A згадуються у зв'язку з їхніми околами.

Під «околом + ∞» розуміють множину всіх дійсних чисел, що перевищують будь-яке число M. Під «околом -∞» розуміють множину всіх дійсних чисел не більших за будь-яке задане число m.

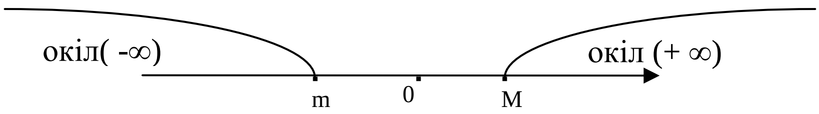


Рис. 4.7.

Означення. Функція $y = f(x)$ має при $x \to +\infty$ границю A, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M \in R$, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ $\forall x > M$.

У цьому випадку число A називають границею функції на ∞ і позначають $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Аналогічно визначається границя функції при $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Означення. Функція $f(x)$ має в точці a нескінченну границю, якщо для будь-якого як завгодно великого додатного числа М $\exists \delta > 0$, $\forall x$ $(x \neq a)$, що задовольняє умові $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$ і позначають $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

4.3.2. Однобічні границі функції

Означення. Число A_1 називають границею функції ліворуч або лівосторонньою границею в точці $x = a$, якщо $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$.

Число A_2 — границею функції праворуч або правосторонньою границею в точці $x = a$, якщо $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$

Запис $x \to a - 0$ означає, що x прямує до a, залишаючись ліворуч a, а запис $x \to a + 0$ означає, що при наближенні до a, x залишається праворуч a.

З означення границі виходить, що якщо границя існує, то вона не залежить від способу наближення аргументу до своєї границі.

Позначимо $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) = A_1,$
$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) = A_2,$

тоді, якщо границя в точці $x = a$ існує, то $f\ (a - 0) = f\ (a + 0) = A$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A.$

Значення $f\ (a - 0)$ і $f\ (a + 0)$ називають однобічними границями.

Отже, для того щоб функція мала границю в точці необхідно й достатньо, щоб у цій точці функція мала однобічні границі й щоб вони були рівні між собою.

4.3.3. Нескінченно малі і їхні основні властивості

Числова послідовність $\{\alpha_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо $\lim\alpha_n = 0$.

Нескінченно малі послідовності (як окремий випадок функцій) і нескінченно малі функції об'єднаємо під загальною назвою: нескінченно малі величини.

Властивості нескінченно малих величин:

1. *Сума скінченного числа нескінченно малих величин - величина нескінченно мала.*
2. *Добуток скінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.*
3. *Добуток величини обмеженої й величини нескінченно малої є величина нескінченно мала.*

Наслідок 1. *Добуток постійної величини на величину нескінченно малу є величина нескінченно мала.*

Наслідок 2. *Добуток скінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.*

4.3.4. Порівняння нескінченно малих величин

При порівнянні нескінченно малих величин розглядають границю їхнього відношення.

Нехай: $\lim \alpha_n = 0$, $\lim \beta_n = 0$.

1. *Якщо* $\lim \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$, *то* α_n *– нескінченно мала величина більш високого порядку, ніж* β_n, *тобто* α_n *наближається до 0 швидше, ніж* β_n *і позначається* $\alpha_n = 0\ (\beta_n)$.

2. *Якщо* $\lim \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$, *то* β_n, *– нескінченно мала величина більш високого порядку, ніж* α_n, *тобто* α_n *наближається до 0 повільніше, ніж* β_n *і позначається* $\beta_n = 0\ (\alpha_n)$.

3. *Якщо* $\lim \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = A(\neq 0, \neq \infty)$, *то* α_n *й* β_n *називаються нескінченно малими величинами одного порядку:* $\alpha_n = A\beta_n$.

4. Якщо $\lim\frac{\alpha_n}{\beta_n}=1$, *то* α_n *й* β_n *називаються еквівалентними нескінченно малими:* $\alpha_n \sim \beta_n$.

5. Якщо $\lim\frac{\alpha_n}{\beta_n^k}=A\left(A\neq 0, A\neq\infty\right)$, *то* α_n *— нескінченно мала величина k-го порядку малості відносно* β_n, *тобто* $\alpha_n \sim A\beta_n^{\kappa}$.

4.3.5. Арифметичні дії з границями

Нехай границі змінних величини x_n й y_n існують, тоді:

1. $\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$, тобто границя алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі границь.
2. $\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$, тобто границя добутку дорівнює добутку границь.
3. $\lim\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim x_n}{\lim y_n}$, якщо $\lim y_n \neq 0$, тобто границя дорівнює частці границь.
4. $\lim C = C$, тобто границя сталої дорівнює цій сталій.

4.3.6. Теореми про еквівалентні нескінченно малі величини

Теорема 1. Для того щоб нескінченно малі величини α і β були еквівалентними необхідно й достатньо, щоб їхня різниця $\alpha - \beta$ була нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж вони самі.

Теорема 2. Границя частки нескінченно малих не зміниться, якщо чисельник і знаменник замінити еквівалентними їм нескінченно малими величинами, тобто $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, то $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Дана властивість справедлива й для нескінченно великих величин.

Теорема 3. Якщо в сумі $\alpha + \beta$, де α і β – нескінченно малі величини різного порядку, відкинути нескінченно малу більш високого порядку, наприклад, β, то частина, що залишилася, буде еквівалентна всій сумі, тобто $\alpha + \beta \sim \alpha$.

І важлива границя: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=1$

ІІ важлива границя: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left\|1^\infty\right\|=e$ або $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=\left\|1^\infty\right\|=e$, де $e\approx 2,718$

Таблиця еквівалентних нескінченно малих

Наслідки І-ї важливої границя:	**Наслідки ІІ-ї важливої границя:**

$$\begin{cases} 1.\ \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 2.\ \arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 3.\ tgx \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 4.\ arctgx \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 5.\ 1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 6.\ e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 7.\ a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln a \\ 8.\ \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \\ 9.\ \log_a(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{\ln a} \\ 10.\ (1+x)^{\mu} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \mu x \\ 10a.\ \sqrt[n]{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{n} \end{cases}$$

Користуючись таблицею еквівалентних нескінченно малих величин, можна одержати деякі додаткові співвідношення:

$shx \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad thx \underset{x\to 0}{\sim} x$

Крім того, якщо $\alpha \sim \beta$, то $\sqrt[n]{1+\alpha} - 1 \sim \sqrt[n]{1+\beta} - 1,\ e^{\alpha} - 1 \sim e^{\beta} - 1$

При обчисленні меж з нескінченно великим аргументом можна враховувати, що якщо $x \to \infty$, то

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,x + a_n \sim a_0x^n$ і отже,

$\sqrt[n]{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n} \sim \sqrt[n]{a_0}\,x.$

Відзначимо ще наступне співвідношення еквівалентності: якщо існує границя (скінченна або нескінченна) $\lim(1+\alpha)^{\beta}$, де α – нескінченно мала, а β – нескінченно велика величина, і якщо $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, то існує й границя $\lim(1+\alpha_1)^{\beta_1}$ й при цьому зазначені границі рівні між собою, тобто $\lim(1+\alpha)^{\beta} = \lim(1+\alpha_1)^{\beta_1}$.

Справедливість цієї рівності перевіряється логарифмуванням обох її частин й врахуванням того, що якщо $\alpha \sim \alpha_1$, то $\ln(1+\alpha) \sim \ln(1+\alpha_1)$.

4.3.7. Приклади

Використовуючи теореми про границю добутку й частки, варто застосовувати наступне правило: якщо під знаком границі множник має скінченну границю, відмінну від нуля, то в цьому множнику доцільно зробити граничний перехід, заміняючи його граничним значенням. Застосування цього правила дозволяє спростити вираз під знаком границі.

При обчисленні границь функцій використовується *правило граничного переходу під знаком неперервної функції*, що формулюється так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Всі елементарні функції неперервні у своїх областях визначення.

При обчисленні границь, насамперед, необхідно аргумент функції замінити його граничним значенням і з'ясувати чи є невизначеність.

Приклад 1.

Знайти $A = \lim\limits_{x\to 2}(x^3 + x + 4)$.

Границі виразів, що не містять невизначеностей, визначаються безпосередньо з застосуванням теорем про границі суми, добутку, частки.

$A = \lim\limits_{x\to 2} x^3 + \lim\limits_{x\to 2} x + 4$ =8+2+4=14.

До *невизначених* виразів відносяться: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty * 0$, $\infty - \infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞.

Якщо в результаті підстановки граничного значення аргументу одержимо *невизначений вираз*, то необхідно виконати тотожні перетворення, в результаті яких *усувається невизначеність*, а потім обчислюється границя.

Розглянемо деякі, що найбільш часто зустрічаються випадки розкриття невизначених виразів.

1. **Розкриття дрібно-раціональних невизначеностей**

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Pn(x)}{Qm(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени степенів *n і m, (n,mєN).*

При $x \to \infty$ маємо $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \sim a_0x^n$, $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m \sim b_0x^m$,

тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Pn(x)}{Qm(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, \text{ якщо } n = m, \\ 0, \text{ якщо } n < m, \\ \infty, \text{ якщо } n > m. \end{cases}$

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4 - 8x^3 + 3x + 7}{7x^4 + 2x^2 - 4} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4}{7x^4} = \frac{2}{7}(n = m)$

Приклад 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{17x^3 + 3x^2 - 8}{3x^8 + 2x^3 + 4x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{17x^3}{3x^8} = 0(n < m)$

Приклад 4.

$$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{32x^5 - 12x^4 + x + 3}{11x^3 + 6x^2 - 1} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{32x^5}{11x^3} = \infty(n > m).$$

á) $\lim\limits_{x\to \grave{a}}\frac{Pn(x)}{Qm(x)} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$

Користуючись тим, що чисельник і знаменник при $x = a$ дорівнюють нулю, виділимо множник $x - a$, що прямує до 0 при $x \to a$.

Наслідок теореми Безу: Якщо а — корінь многочлена $P_n(x)=0$, тобто $P_n(a) = 0$, то $P_n(x)$ ділиться без залишку на різницю $x - a$,

тобто $P_n(x) = (x - a) P_{n-1}(x)$.

Зокрема, квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ ($D = b^2 - 4ac \geq 0$) може бути представлений у вигляді добутку

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 й x_2 — корені квадратного тричлена.

Приклад 5. $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^3-3}{x^3-2x+1}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|.$

Для того щоб позбутися невизначеності, чисельник і знаменник розкладемо на множники, користуючись наслідком теореми Безу. Ділимо чисельник і знаменник на $x-1$:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^4+2x^3-3 & x-1 \\
\quad\underline{x^4-x^3} & x^3+3x^2+3x+3 \\
\qquad -\,3x^3-3 & \\
\qquad\quad \underline{3x^3-3x^2} & \\
\qquad\qquad -\,3x^3-3 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{3x^3-3x} & \\
\qquad\qquad\qquad -\,3x-3 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{3x-3} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
-\,x^3-2x+1 & x-1 \\
\quad\underline{x^3-x^2} & x^2+x-1 \\
\qquad -\,x^2-2x & \\
\qquad\quad \underline{x^2-x} & \\
\qquad\qquad -\,x+1 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{x+1} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Чисельник можна представити у вигляді:
$x^4+2x^3-3=(x-1)\,(x^3+x^2+3x+3)$,
аналогічно знаменник: $x^3-2x+1=(x-1)\,(x^2+x-1)$,
тоді $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^3+3x^2+3x+3)}{(x-1)(x^2+x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2+3x+3}{x^2+x-1}=10.$

(відзначимо, що при $x\to 1$ різниця $x-1\neq 0$, тому скорочувати $x-1$ можна).

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+2x)^2+2x+1}{2x+x^4}=\dfrac{4+1}{0}=\dfrac{5}{0}=\infty.$

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{3x^2-x+3}=\dfrac{0}{13}=0.$

У прикладах 6 й 7 не з'являються невизначені вирази, тому відповіді знаходимо без попередніх перетворень.

Приклад 8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{3x^2+x-30}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{3(x-3)\left(x+\dfrac{10}{3}\right)}=\dfrac{4}{19}.$

Приклад 9

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{x-1}-\frac{x^2+1}{x^2+x-2}\right)=\|\infty-\infty\|=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{x-1}-\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)}\right)$$
.
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x+2)-x^2-1}{(x-1)(x+2)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{5x+5}{(x-1)(x+2)}=\infty.$$

2. **Розкриття ірраціональних невизначеностей** виду $\dfrac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \dfrac{0}{0},\ \infty-\infty.$

Приклад 1. Знайти границю

$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^3-2x^3-1}}{16x^2-3x+17}=\left\|\frac{0}{0}\right\|$$

Оскільки при $x \to \infty$ маємо $\sqrt[3]{27x^3-2x^2-1}\sim 3x, \sqrt{16x^2-3x+17}\sim 4x,$ то $I=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}.$

Приклад 2. Знайти границю

$$A=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}}-x\sqrt{2}\right)=\|\infty-\infty\|$$

Для того щоб позбутися ірраціональності, чисельник і знаменник множать на так називаний спряжений вираз.
При цьому використовуються формули:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b,$$

$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a-b.$$

У нашому випадку помножимо чисельник і знаменник на $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}}+x\sqrt{2}$, тоді

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}}-x\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}}+x\sqrt{2}}\frac{(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}}+x\sqrt{2})}{}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\sqrt{x^4+2}-x^2\right)}{2\sqrt{2}x},$$ де

$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2}}+x\sqrt{2}\underset{x\to\infty}{\sim}2\sqrt{2}x\ ;$$

Знову помножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз, тоді

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to\infty}x^2\frac{\left(x^4+2\right)-x^4}{\sqrt{x^4+2}+x^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$ де $\sqrt{x^4+2}+x^2\underset{x\to\infty}{\sim}2x^2$

Приклад 3.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=\|\infty+\infty\|=\infty$ (Сума нескінченно великих величин одного знака є величина нескінченно велика).

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^5+x^3+3x+4}+\sqrt{2x^2+x-3}}{x^2\sqrt{x+4}+\sqrt[3]{x+2}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{x^{5/2}}=3,$$

де $\sqrt{9x^5+x^3+3x+4}+\sqrt{2x^2+x-3}\underset{x\to\infty}{\sim}3x^{\frac{5}{2}},\ x^2\sqrt{x+4}+\sqrt[3]{x+2}\underset{x\to\infty}{\sim}x^{\frac{5}{2}}$

тому, що $\sqrt{2x^2+x-3}\underset{x\to\infty}{\sim}\sqrt{2}\cdot x\left(\frac{5}{2}>1\right);\ \sqrt[3]{x+2}\underset{x\to\infty}{\sim}x^{1/3}\left(\frac{5}{2}>\frac{1}{3}\right).$

Чисельник еквівалентний $3x^{5/2}$, знаменник — $x^{5/2}$.

Приклад 5.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x+3}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x+3}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x+3}\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2-4)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x+3}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)(4x+1-3x-3)}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити границю $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5-3x^2-x+1}-x\right)=\|\infty-\infty\|$.

Через наявність кореня з високим показником множення й ділення на спряжений вираз тут недоцільно. Перетворимо вираз I у такий спосіб:

$$I=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[5]{1-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}-1\right)$$

При $x\to\infty$ вираз $-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\to 0$,

отже $\sqrt[5]{1-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}-1\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{5}\left(-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)$

за формулою $(1+x)^m-1\underset{x\to 0}{\sim}mx$

Оскільки величина $\frac{-1}{x^4}+\frac{1}{x^5}$ є нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж $\frac{-3}{x^3}$, то її можна відкинути. Звідси нескінченно мала величина має вид: $\frac{1}{5}\left(-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)\sim-\frac{3}{5x^3}$.

Виходить, $I=\frac{-3}{5}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0.$

Приклад 7. $I=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2\sqrt{x^3+1}+x\right)^2}{3\sqrt{x^6+7}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Для виділення головної частини чисельника й знаменника скористаємося еквівалентними нескінченно великими величинами, тобто

$\left(2\sqrt{x^3+1}+x\right)^2\sim 4x^3,$

$3\sqrt{x^6+7}\sim 3\sqrt{x^6}=3x^3.$

Таким чином, $I=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3}{3x^3}=\frac{4}{3}.$

Приклад 8. $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+20x^3-x}-\sqrt[3]{8x^3+6x^2+5}\right)$

Обидва радикали мають однакову головну частину *2x*, віднімаючи яку від кожного радикала, одержимо

$$I=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt[4]{16x^4+20x^3-x}-2x\right)-\left(\sqrt[3]{8x^3+6x^2+5}-2x\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}2x\left(\left(\sqrt[4]{1+\frac{5}{4x}-\frac{1}{16x^3}}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{4x}+\frac{5}{8x^3}}-1\right)\right)$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\left(x\left(\left(1+\frac{5}{4x}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right)-\left(\left(1-\frac{3}{4x}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)\right)=$$

$$=2\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{5}{4\cdot 4x}+\frac{1}{4x}\right)=2\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8}.$$

3. **Знаходження границь функцій з використанням I й II важливих границь й їхніх наслідків**

Розглянемо приклади границь, у яких застосовується таблиця еквівалентних нескінченно малих; отримана як наслідки з I й II важливих границь, а також самі I й II важливі границі. Відзначимо, що заміняти еквівалентними нескінченно малими в різниці двох еквівалентних нескінченно малих не рекомендується, тому що це може привести до невірного результату.

Приклад 1. $A=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\left\|\frac{0}{0}\right\|$

Замінивши *tgx* й *sinx* у різниці *tgx – sinx* еквівалентною нескінченно малою *x*, ми б одержали $A = 0$.

Однак, виконавши наступні перетворення, знайдемо

tgx – sinx = *tgx*(1 – *cosx*) ~ $x\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{2}$, тоді

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2\cdot x^3}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 2. $A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|$

У чисельнику віднімемо й додамо 1, тоді, розділивши почленно, знайдемо

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x\sin x}-1\right)-\left(\cos x-1\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x\sin x)^{\frac{1}{2}}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=$$

$$=\left\|\begin{matrix}(1+x\sin x)^{\frac{1}{2}}-1\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}\\ \cos x-1\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\cdot\frac{x^2}{4}}-\lim_{x\to 0}\frac{\left(-x^2\right)}{2\cdot\frac{x^2}{4}}=2+2=4.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-2^{-x}}{tg3x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to0}\frac{2^{2x}-1}{2^x\cdot tg3x}\left|\begin{array}{l}2^{2x}-1\underset{x\to0}{\sim}2x\ln2\\ \lim\limits_{x\to0}2^x=1\\ tg3x\underset{x\to0}{\sim}3x\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{2x\ln2}{3x}=\frac{2\ln2}{3}.$$

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\infty}x\left[\ln(x+2)-\ln(x-2)\right]=\|\infty-\infty\|=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{(x-2)+4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{4}{x-2}\right)$$

$$\left\|\ln\left(1+\frac{4}{x-2}\right)\sim\frac{4}{x-2}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1-\frac{2}{x}}=4.$$

Приклад 5. $I=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(2x-3)}{5^x-25}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$

Перетворимо чисельник і знаменник, замінивши еквівалентними нескінченно малими:

$\ln(2x-3)=\ln(1+(2x-4))\sim 2x-4=2(x-2)$

$5^x-25=5^x-5^2=5^2(5^{x-2}-1)\sim 25(x-2)\ln5.$

Тоді $I=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2(x-2)}{25(x-2)\ln5}=\dfrac{2}{25\ln5.}$

Приклад 6.

$$\lim_{x\to0}\frac{5^x-2^x}{\log_8(1+3x)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\begin{array}{l}5^x-2^x=2^x\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x-1\right)\underset{x\to0}{\sim}x\ln\frac{5}{2}\\ \log_8(1+3x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{3x}{\ln8}=\frac{3x}{3\ln2}=\frac{x}{\ln2}\end{array}\right\|=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\frac{5}{2}}{\frac{x}{\ln2}}=\ln2\ln\frac{5}{2}$$

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln cosx}{x}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+(\cos x-1))}{x}\left\|\ln(1+(\cos x-1))\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{-x^2}{2}\right\|=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{x}{2}\right)=0.$$

Приклад 8. $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-5}\right)^{x+3}=\left\|1^\infty\right\|$

Невизначеності виду $\left\|1^\infty\right\|$ приводяться до другої важливої границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

Вираз під знаком границі є сума одиниці й нескінченно малої величини $\frac{1}{x}$, показник степеня є величина, обернена до величини $\frac{1}{x}$, тобто x. Для того щоб привести до другої важливої границі, можна або перетворити чисельник з метою виділення одиниці, тобто записати $\frac{3x+2}{3x-5}=\frac{(3x-5)+7}{(3x-5)}=1+\frac{7}{3x-5}$, або застосувати універсальний підхід, додаючи й віднімаючи до дробу $\frac{3x+2}{3x-5}$ одиницю, тобто записати

$$\frac{3x+2}{3x-5}=1+\left(\frac{3x+2}{3x-5}-1\right)=1+\frac{3x+2-3x+5}{3x-5}=1+\frac{7}{3x-5}$$

Отже, величина $\frac{7}{3x-5}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$. Обернена величина дорівнює $\frac{3x-5}{7}$.

Перетворимо вихідний вираз, що стоїть під знаком границі.

$$\left(\frac{3x+2}{3x-5}\right)^{x+3}=\left[\left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{7}}\right]^{\frac{7(x+3)}{3x-5}}$$

Основа прямує до e, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3\tilde{o}-5}\right)^{\frac{3\tilde{o}-5}{7}}=e$ (за другою важливою границею).

Тоді відшукання границі зводиться до відшукання границі показника.

$$I=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{7}}\right]^{\frac{7(x+3)}{3x-5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7(x+3)}{3x-5}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7+\frac{3}{x}}{3-\frac{5}{x}}}=e^{\frac{7}{3}},$$ де $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0.$

Приклад 9. $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+2}{x^2-2x+1}\right)^{\frac{3x^2}{x-1}}=\left\|1^{\infty}\right\|$

Виконаємо перетворення з основою й показником степеня аналогічні перетворенням попереднього приклада.

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-4x+2}{x^2-2x+1}-1\right)^{\frac{3x^2}{x-1}}=$$

$$=\left\|\frac{x^2-4x+2}{x^2-2x+1}-1=\frac{x^2-4x+2-x^2+2x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2x+1}{(x-1)^2}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2x+1}{(x-1)^2}\right)^{\frac{(x-1)^2}{-2x+1}}\right)^{\frac{(-2x+1)}{(x-1)^2}\cdot\frac{3x^2}{(x-1)}}=e^{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}}=e^{-6}.$$

Приклад 10. $I=\lim\limits_{x\to0}(1+tg2x)^{\frac{1}{\arcsin3x}}$

Використуємо рівність границь

$$\lim(1+\alpha)^{\beta}=\lim(1+\alpha_1)^{\beta_1},\quad (A)$$

де $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, тобто нескінченно малі α і α_1 еквівалентні й нескінченно великі β і β_1 теж еквівалентні. Урахуємо, що $tg2x \sim 2x$, $\frac{1}{\arcsin 3x} \sim \frac{1}{3x}$, тоді

$$I = \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

Приклад 11. $I = \lim_{x\to 0}(\cos x + 2\sin x)^{\frac{1}{x}} = \left\| 1^{\infty} \right\| =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x + 2\sin x - 1)\right)^{\frac{1}{x}} \left\| \begin{array}{l} \cos x + 2\sin x - 1 = (\cos x - 1) + 2\sin x \underset{x\to 0}{\sim} 2x, \\ \text{тому що } \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}\ . \\ \text{В сумі нескінченно малу більш високого} \\ \text{порядку можна опустити.} \end{array} \right\|$$

За формулою (A) одержимо

$$I = \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2} = e^{2}.$$

При знаходженні границі при $x \to a$ зручна заміна змінної $x - a = t$, тоді $t \to 0$.

Приклад 12.

$$\lim_{x\to 4}\frac{2^x - 16}{\sin \pi x}\left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 4}\frac{16\left(2^{x-4}-1\right)}{-\sin(4\pi - \pi x)} \left\| \begin{array}{l} x-4=t,\ x\to 4, \quad t\to 0 \\ 2^{x-4}-1 \sim (x-4)\ln 2 = t\ln 2 \\ \sin(4\pi - \pi x) \sim \pi(4-x) = -\pi t \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{16\cdot t\ln 2}{\pi t} = \frac{16\ln 2}{\pi}.$$

Приклад 13. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 x} = \left\|1^{\infty}\right\| \left\| \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = t,\ t\to 0 \\ x = \frac{\pi}{2} - t;\ \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \\ tgx = tg\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \mathrm{c}tgt = \frac{1}{tgt} \end{array} \right\|$

$$= \lim_{t\to 0}(\cos t)^{\frac{1}{tg^2 t}} = \lim_{t\to 0}\left(1+(\cos t - 1)\right)^{\frac{1}{tg^2 t}} \left\| \cos t - 1 \sim -\frac{t^2}{2},\ \frac{1}{tg^2 t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^2} \right\|$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(1 - \frac{t^2}{2}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0}\left[\left(1 - \frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{2}{t^2}}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Приклад 14. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| \left\| \begin{array}{l} \pi - x = t \\ x = \pi - t, \quad t\to 0 \end{array} \right\| =$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin 3(\pi - t)}{\sin 2(\pi - t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(3\pi - 3t)}{\sin(2\pi - 2t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi - 3t)}{-\sin 2t} = \lim_{t\to 0}\frac{3t}{-2t} = -\frac{3}{2}.$$

Приклад 15.

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\frac{1}{2}\lim_{x\to 16}\frac{\left(1+\left(\frac{x}{16}-1\right)\right)^{\frac{1}{4}}-1}{\left(1+\left(\frac{x}{16}-1\right)\right)^{\frac{1}{2}}-1}==\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{x}{16}-1\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{16}-1\right)}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 16.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-\sqrt{3}tgx}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\left\|\begin{matrix}\frac{\pi}{6}-x=y,\\ x=\frac{\pi}{6}-y,\quad y\to 0\end{matrix}\right\|=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sqrt{3}tg\left(\frac{\pi}{6}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{3}\left(tg\frac{\pi}{6}-tg\left(\frac{\pi}{6}-y\right)\right)}{\sin y}=$$

$$\sqrt{3}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sin y\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}-y\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Приклад 17.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\(x-1\to 0)}}\frac{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2}{1+\cos\pi x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\begin{matrix}x-1=z,\ z\to 0\Rightarrow x=1+z\\ \sqrt[4]{x}-1=\left(1\ +z\right)^{\frac{1}{4}}-1\underset{z\to 0}{\sim}\frac{1}{4}z\\ 1+\cos\pi x=1+\cos\left(\pi+\pi z\right)=1-\cos\pi z\underset{z\to 0}{\sim}\frac{\pi^2z^2}{2}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{16}z^2}{\frac{\pi^2}{2}z^2}=\frac{1}{8\pi^2}.$$

Приклад 18.

$$\lim_{x\to 3}\left(\sin\frac{x-3}{2}tg\frac{\pi x}{6}\right)=\left\|0\cdot\infty\right\|\left\|\begin{matrix}x-3=y,\ y\to 0,\ x=y+3,\ \sin\frac{x-3}{2}=\sin\frac{y}{2}\underset{y\to 0}{\sim}\frac{y}{2}\\ tg\frac{\pi x}{6}=tg\frac{\pi}{6}\left(y+3\right)=tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi y}{6}\right)=-ctg\frac{\pi y}{6}=\\ -\frac{1}{tg\frac{\pi y}{6}}\underset{y\to 0}{\sim}\frac{-1}{\frac{\pi y}{6}}=\frac{-6}{\pi y}\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot 6}{2\pi y}=-\frac{3}{\pi}$$

Приклад 19.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tg^2 x\left(\sqrt{2\sin^2 x+3\sin x+4}-\sqrt{\sin^2 x+6\sin x+2}\right)=\left\|\infty\cdot 0\right\|$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\sin x=y,\ y\to 1\\ tg^2x=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{y^2}{1-y^2}\\ \dfrac{y^2}{1-y^2}=\dfrac{y^2}{(1-y)(1+y)}\sim\dfrac{1}{2(1-y)}\end{array}\right\|=\frac{1}{2}\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{2y^2+3y+4}-\sqrt{y^2+6y+2}}{1-y}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{y\to 1}\frac{2y^2+3y+4-y^2-6y-2}{(1-y)\left(\sqrt{2y^2+3y+4}+\sqrt{y^2+6y+2}\right)}=\frac{1}{12}\lim_{y\to 1}\frac{y^2-3y+2}{1-y}=\frac{1}{12}\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y-2)}{1-y}=\frac{1}{12}.$$

4.4. Приклади порівняння нескінченно малих величин

При вивченні різних питань, пов'язаних з поняттям нескінченно малої величини, потрібно розрізняти нескінченно малі за характером їхньої зміни. Одні нескінченно малі наближаються до нуля «швидше», інші «повільніше».

Приклад 1. Перевірити, чи є еквівалентними нескінченно малі величини $f(x)=e^{\sin x}-e\;\; i\;\; g(x)=arc\sin(1-\sin x)$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}.$

Знайдемо границю відношення

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}-e}{\arcsin(1-\sin x)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\left\|\begin{array}{l}e^{\sin x}-e=e\left(e^{\sin x-1}-1\right)\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim}e(\sin x-1)\\ \arcsin(1-\sin x)\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim}1-\sin x,\textit{бо}\ \arcsin y\underset{y\to 0}{\sim}y\end{array}\right\|$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e(\sin x-1)}{1-\sin x}=-e.$$

Відповідь: Нескінченно малі величини $f(x)\,i\,g(x)$ є нескінченно малими одного порядку, але не еквівалентними.

Приклад 2. Визначити при $x\to 0$ порядок нескінченно малої $\alpha=2^{x\sqrt{x}}-\cos x$ відносно x.

При розв’язанні питання про відносний порядок малості нескінченно малих величин обчислюють границю відношення $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{x^k}$, де k потрібно знайти таке, щоб дана границя була сталою, відмінною від нуля. При цьому, нескінченно мала величина α буде величиною *k-го* порядку щодо нескінченної малої величини x.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{x\sqrt{x}}-\cos x}{x^k}=\left\|\begin{array}{l}2^{x\sqrt{x}}-\cos x=\left(2^{x\sqrt{x}}-1\right)-\left(\cos x-1\right)\sim\\ \sim x^{\frac{3}{2}}\ln 2+\dfrac{x^2}{2}\sim x^{\frac{3}{2}}\ln 2,\ \text{бо}\ \dfrac{x^2}{2}=0\left(x^{\frac{3}{2}}\ln 2\right)\end{array}\right\|$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{3/2}\ln 2}{x^k}\underset{k=\frac{3}{2}}{=}\ln 2$$

Відповідь: Порядок малості нескінченно малої α відносно x дорівнює $\frac{3}{2}$.

Приклад 3. Знайти відносний порядок малості при $x\to\frac{\pi}{3}$ функцій $\alpha=tg^3x-3tgx$ і $\beta=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\alpha}{\beta^k}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tg^3x-3tgx}{\cos^k\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tgx\left(tg^2x-tg^2\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^k\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-tgx\left(tgx+tg\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}\sin^k\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{\frac{1}{4}}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\sin^k\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}\underset{(k=1)}{=}-24.$$

Відповідь: Нескінченно малі α і β одного порядку малості (k =1).

Приклад 4. Визначити порядок малості при $x\to 0$ функції $\alpha=\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ відносно x.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{x}}-1}{x^k}=\left\|\frac{0}{0}\right\|\left\|\begin{array}{l}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{1}{7}}-1\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{7}x^{\frac{1}{3}}\\ \text{за формулою}\\ \left(1+x\right)^m-1\underset{x\to 0}{\sim}mx\end{array}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{7}x^{\frac{1}{3}}}{x^k}\underset{k=\frac{1}{3}}{=}\frac{1}{7}.$$

Відповідь: Функція α нескінченно мала порядку $\frac{1}{3}$ відносно x при $x\to 0$.

4.5. Неперервність функції

Якщо обмежитися інтуїтивним поясненням, то лінія неперервна, якщо її можна накреслити, не відриваючи олівця від паперу.

Означення 1. Функція називається *неперервною* в точці , якщо вона визначена в цій точці й у деякому її околі й

. (4.5. 1)

Оскільки , рівність (4.5. 1) можна переписати:

, (4.5. 2)

тобто для неперервної функції в точці символ *“lim”* – граничного переходу й символ функції “ ” можна переставляти.

Якщо в рівності (4.5. 1) перенести в ліву частину й внести під знак границі, як константу, то одержимо

. (4.5. 3)

Різниця називається приростом аргументу й позначається , а $f(x) - f(x_0)$ – приростом функції й позначається Δf .

У цих позначеннях рівність (4.5. 3) перепишеться у вигляді: .

Означення 2. Функція називається *неперервною* в точці , якщо нескінченно малому *приросту аргументу* в цій точці відповідає нескінченно малий *приріст функції.*

Означення 3. (мовою «ε-δ»). Функція називається *неперервною* в точці , якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, що для всіх x, що задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Однобічна неперервність

Означення. Функція , визначена в деякому околі точки при , називається неперервною в точці ліворуч (праворуч), якщо

( ). (4.5.4)

Приклад 1. Функція $y = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x \le 1 \\ 2x, \text{ якщо } x > 1 \end{cases}$ в точці $x=1$ за означенням є неперервною ліворуч.(рис.4.8)

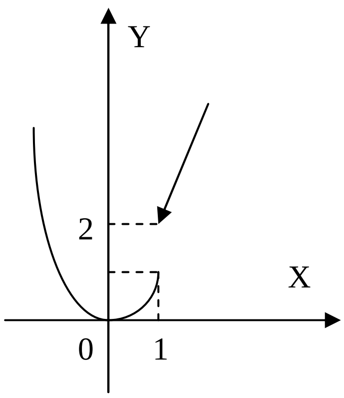


Рис. 4.8

Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу, то вона називається *неперервною на всьому інтервалі*.

Якщо функція неперервна в кожній внутрішній точці відрізка й, крім того, неперервна праворуч у точці й ліворуч у точці , то вона називається *неперервною на відрізку* .

Всі *елементарні функції* є *неперервними* у своїй області визначення.

4.5.1. Точки розриву та їхня класифікація

З означення 1 неперервності функції витікає, що функція неперервна в точці x_0, якщо виконуються умови:

1. Функція $f(x)$ визначена в точці $x = x_0$ й деякому її околі й $f(x)=A$.
2. Існує скінченна права границя функції $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = B$.
3. Існує скінченна ліва границя функції $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = C$.
4. Однобічні границі рівні, тобто $B=C$.
5. Однобічні границі дорівнюють значенню функції в точці $x = x_0$, тобто $A=B=C=f(x_0)$.

Якщо не виконується хоча б одна з перерахованих умов, то говорять, що функція має (терпить) *розрив* у точці $x = x_0$. Розрізняють точки розриву *I й II роду*. Якщо в точці розриву функція *має* скінченні однобічні границі , то це – *точка розриву I роду*. Якщо ж хоча б одна з однобічних границь наближається *до нескінченності або принципово не існує*, то точка $x = x_0$ є *точкою розриву II роду*.

Зокрема, якщо не виконана умова 1 і відповідно 5, то точка $x = x_0$ називається точкою *усувного розриву* (I роду), тому що довизначивши функцію в точці розриву, одержимо неперервну функцію.

Якщо існують *скінченні однобічні границі*, але вони *не рівні* між собою, тобто B≠C, то точка $x = x_0$ називається *точкою розриву I роду типу «стрибок»* ($|B-C|$ – величина стрибка функції).

Отже, для визначення характеру точки розриву функції треба:

1. Знайти точки в яких функція може мати розрив.
2. Обчислити однобічні границі й .
3. З огляду на отримані значення цих границь, зробити висновок про характер розриву.

Дослідити на неперервність і класифікувати точки розриву функції.

Приклад 1. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

Функції $\sin x$ і x визначені на всій числовій осі, але в точці $x_0=0$ функція $\frac{\sin x}{x}$ невизначена. Однобічні границі збігаються, тобто $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = 1$, при цьому $f(+0)=f(-0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Умова $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ не виконується, тому в точці $x_0=0$ функція має усувний розрив (рис. 4.9). Довизначимо функцію $f(x)$ у точці $x_0=0$, визначивши $F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Тоді $F(x)$ неперервна на всій числовій осі.

Приклад 2. $f(x)= \frac{|\sin x|}{x}$ $x_0=0$ – точка розриву.

Однобічні границі рівні:

$f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $f(-0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin(-x)}{x}=-1$, тобто *f(+0)* і *f(-0)* існують, але не рівні між собою (не виконується умова 4). Отже, $x=0$ – точка розриву І роду, «стрибок» (Рис. 4.10).

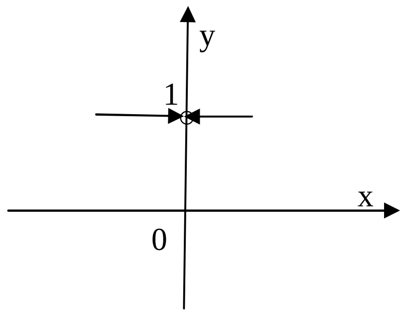


Рис.4.9

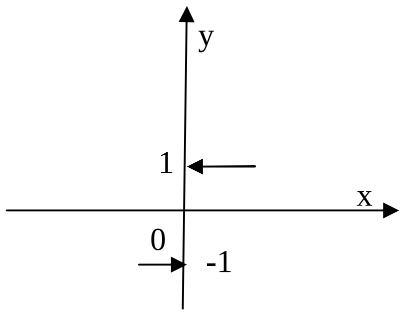


Рис.4.10

Приклад 3. $f(x)=2^{\frac{x}{4-x}}$

Показникова функція неперервна всюди в області визначення, але в точці $x_0=4$ функція невизначена (Рис. 4.11).

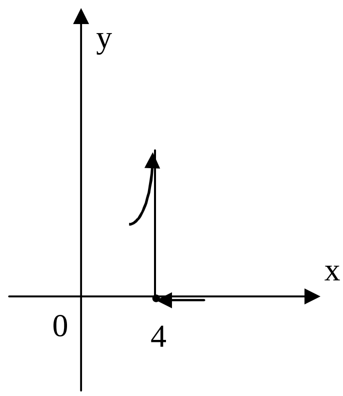


Рис.4.11

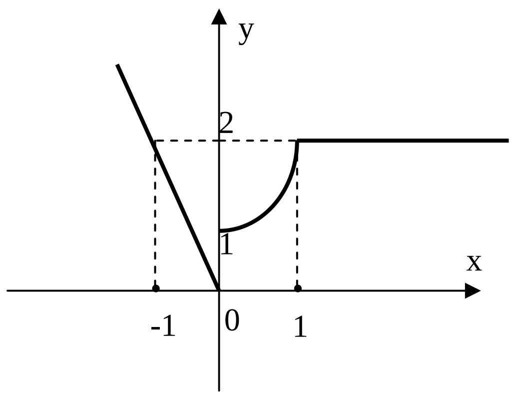


Рис.4.12

Знаходимо $\lim\limits_{x\to4+0}2^{\frac{x}{4-x}}=0$, $\lim\limits_{x\to4-0}2^{\frac{x}{4-x}}=\infty$. Точка x=4- точка розриву другого роду.

Приклад 4.

$$f(x)=\begin{cases}-2x & \text{при } x<0,\\ x^2+1 & \text{при } 0\le x<1,\\ 2 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Функція *f(x)* визначена на всій числовій осі; функції $-2x$, x^2+1, 2 неперервні всюди як елементарні функції. Однак у точках $x_1=0$ й $x_2=1$ змінюються її аналітичні вирази.

Дослідимо точку $x_1=0$. Обчислимо однобічні границі:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}(-2x) = 0 = f(-0), \quad \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}(x^2+1) = 1 = f(+0).$$

У точці $x_1=0$ однобічні границі існують і різні, отже, маємо розрив 1-го роду– «стрибок».

Дослідимо точку $x_2=1$. Обчислимо однобічні границі:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(x^2+1) = 2 = f(1-0), \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 2 = 2 = f(1+0).$$

Значення функції $f(1)=2$. Оскільки $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=2$, функція $f(x)$ неперервна в точці $x_2=1$(Рис. 4.12).

4.5.2. Основні теореми про неперервні функції

Теореми. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0, тоді:

1. $f(x) \pm \varphi(x)$– неперервна функція, тобто сума неперервних функцій є функція неперервна.
2. $f(x) \cdot \varphi(x)$)–неперервна функція, тобто добуток неперервних функцій є функція неперервна.
3. $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$(за умови $\varphi(x_0)\neq 0$) – неперервна функція, тобто частка неперервних функцій є функція неперервна у всіх точках, де знаменник не дорівнює нулю.

Теорема 4. Нехай функція $x=\varphi(t)$ неперервна в точці a, а функція $y=f(x)$ неперервна в точці $b=\varphi(a)$, тоді складна функція $y=f(\varphi(t))$ буде неперервна в точці a.

Нехай функція $y=f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$, причому множиною значень цієї функції є відрізок $[\alpha,\beta]$. Нехай кожному $y\in[\alpha,\beta]$ відповідає тільки одне значення $x\in[a,b]$, для якого $f(x)=y$. Тоді на відрізку $[\alpha,\beta]$ можна визначити функцію $x=f^{-1}(y)$, ставлячи у відповідність кожному значенню $y\in[\alpha,\beta]$ те значення $x\in[a,b]$, для якого $f(x)=y$. Функція $x=f^{-1}(y)$ називається *оберненою* для функції $y=f(x)$.

Теорема 5. Нехай на відрізку $[a,b]$ задана строго монотонна неперервна функція $y=f(x)$, і нехай $\alpha=f(a)$, $\beta=f(b)$, $(\alpha<\beta)$. Тоді ця *функція має* на відрізку $[\alpha,\beta]$ строго монотонну й неперервну *обернену* функцію $x=f^{-1}(y)$ або $x=\varphi(y)$.

4.6. Властивості функцій, неперервних на відрізку

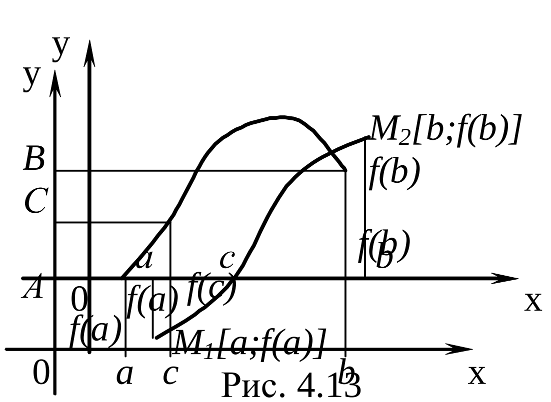


Рис. 4.13
Рис. 4.14

Властивості функцій, неперервних на відрізку, формулюються нижче у вигляді теорем.

Теорема (*Больцано-Коші*). Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ й на кінцях цього відрізка приймає значення різних знаків, то між точками a й b знайдеться, принаймні, одна точка $x = c$, у якій функція обертається в нуль: $f(c) = 0, a < c < b$. Ця теорема має наступний геометричний зміст: графік неперервної функції $y = f(x)$, що з'єднує точки $M_1[a, f(a)]$ й $M_2[b, f(b)]$, де $f(a) < 0$ й $f(b) > 0$ (або $f(a) > 0$ й $f(b) < 0$), перетинає вісь *Ox*, принаймні, в одній точці (рис. 4.13).

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$ причому $f(a) = A, f(b) = B$, і нехай C – будь-яке число між A и B, тобто $A < C < B$, тоді на відрізку $[a,b]$ знайдеться така точка $x = c$, у якій $f(c) = C$ (рис. 4.14).

Теорема *(перша теорема Вейерштрасса).* Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Теорема *(друга теорема Вейерштрасса).* Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх точних верхньої й нижньої граней (тобто знайдуться такі точки x_1 і x_2, що $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$).

Контрольні завдання до розділу 4

Завдання 1.Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя.

4.1.1. $а)\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2 - 3x + 4\right)$ $\quad б)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3 - x + 4}{2x^3 - 4x^2 + 3}$

$в)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^4 + 5x - 3} + \sqrt[3]{2x^3 + 5x^2 + 4}}{\sqrt[4]{7x^3 + 4x^2 + 3} - \sqrt{2x^5 + 7x^4 - 5}}$ $\quad г)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 + x - 21}$

$д)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2}}{\sqrt{8x+1} - 3}$ $\quad е)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 2x}$ $\quad ж)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$

$з)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$ $\quad и)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$ $\quad k)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x} - 5^{2x}}{2x - arctg 3x}$

$л)\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \ln\left(1 + x^3\right)\right)^{\frac{3}{x^2 \sin x}}$ $\quad м)\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$

4.1.2. $а)\lim\limits_{x\to 3}\left(2x^3 + 3x^2 - 1\right)\left(7x + 12\right)$ $\quad б)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3 - 4x^2 + 3}{4x^3 + 7x - 5}$

$в)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2 + 4x - 3} - \sqrt{3x^2 - 2x + 7}\right)$ $\quad г)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 8}$

$д)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ $\quad е)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{x\sin x}$ $\quad ж)\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln\left(x+2\right) - \ln x\right]$

$з)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$ $\quad и)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$ $\quad k)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x} - e^{-2x}}{2\arcsin x - \sin x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{1+3^x}\right)^{1/x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$

4.1.3. *а*) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2+5x-4}{x+7}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+4x^4-3x-2}{7x^5-2x+5}$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5x^4-3x^3+7+x}+\sqrt[3]{x^2-4x+3}}{\sqrt[5]{x^2+3x-2}+\sqrt[6]{x+5}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x^2-7x}{x^2-2x-3}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ *е*) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\pi/2-x\right)^2}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{x+2}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}$

4.1.4. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2}x^2-5x-6\right)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{2x^2+4x-3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5x^2-4x+3}+\sqrt[3]{x^3-4x^2+5}}{x^2+\sqrt{3x^2+5x-3}+\sqrt[4]{x-3}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-5x-6}{6x^2-37x+6}$

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x+2}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^{2x}-5^x}{tg\,x-\sin 2x}\right)$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{arctg^2\sqrt{x}}\right)^{2/\sin x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/x+2}$

4.1.5. *а*) $\lim\limits_{x\to -1}(2x-3)(x+2)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-2}{5x^2+3x-1}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+2x+5}-\sqrt{x^3-x+4}\right)\sqrt{x}$ *г*) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+8x+16}{2x^2+\dfrac{17}{2}x+2}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x-2)-\ln(x+3)\right]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg(\pi(2+x))}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\sin^2\pi x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{arctg\,x+x^3}$

л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x+4}\right)^{4x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x+3}$

4.1.6. *а)* $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(9-4x)(6+x)}{x-2}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+5x-3}{2x^3+4x^2+5}$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+4x^3-3}-\sqrt{x^6-x+4}\right)$ *г)* $\lim\limits_{x\to8}\left(\dfrac{x+2}{x-8}-\dfrac{x^2+6}{x^2-9x+8}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ *е)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arcsin x}{x}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x-x^2}$

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{tg(2\pi(x+1/2))}$ *и)* $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to0}x(\ln(x+1)-\ln(x-3))$

л) $\lim\limits_{x\to0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 3x}$ *м)* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$

4.1.7. *а)* $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(3x^2-4x-10\right)$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x+14}{7x^3+2x^2-3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{6x^3+5x+3}+\sqrt[3]{x^4+6x^2-3}}{\sqrt{x^3-5x+3}+\sqrt[6]{x^2-4x+5}}$

г) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2x^2-5x-63}{x^2-6x-7}$

д) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ *е)* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{x-1}$

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{4x^2}$ *и)* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{(x-\pi)^4}$ *k)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{5x}-5^{3x}}{x-\sin 9x}$

л) $\lim\limits_{x\to0}(1-ln(1+\sqrt[3]{x}))^{4/(sin\sqrt[3]{x})}$ *м)* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)}$

4.1.8. *а)* $\lim\limits_{x\to-4}(x-6)\left(\dfrac{1}{3}x+8\right)$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+18x-3}{3x^3+5x+10}$ *д)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{12x^5+5x-3}+\sqrt[3]{x^2-3x+2}}{\sqrt[5]{5x^3-4x+3}+\sqrt[5]{x^6+5x-3}}$ *г)* $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{3x^2-7x-40}{x^2-10x+25}\right)$

е) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\left[\ln(x+2)-\ln(x-1)\right]$

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{\cos 2x-\cos 3x}$ *и)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$ *k)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2arctg\,x-\sin x}$

л) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-e^{(\arcsin\sqrt{x})^2}\right)^{3/x}$ *м)* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{tg\,4x}{x}\right)^{2+x}$

4.1.9. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-5)(3x-4)}{x+2}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+4x+3}{10x^3+5x^2-1}$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+7x-4}-\sqrt{x^2+3}\right)$ *г*) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3x+2}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sin 3x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^x-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+6}\right)^{2x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{1/x\cdot\sin\pi x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{\frac{8x+3}{1+x}}$

4.1.10. *а*) $\lim\limits_{x\to 4}\left(3x^2-2x+5\right)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+6x-1}{5x^4-4x^3+3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+4x-5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-2x-15}-\sqrt[4]{x+5}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-2x-15}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{9-x}}{x-1}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{arctg 3x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\, 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^x-e^{2\pi}}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{1/\ln\cos x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$

4.1.11. *а*) $\lim\limits_{x\to-2}(x-3)(2x+5)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+8x^2+1}{12x^3-9x+5}$ *е*) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{3x^2+2x-1}+\sqrt[5]{x^2+4x-3}}{\sqrt[6]{5x^7+4x+5}+\sqrt{x+3}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 1/3}\left(\dfrac{9x^2-6x+1}{3x^2+2x-1}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{3x+a}-\sqrt{x+3a}}{x-a}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{ctg\, x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$

4.1.12. *а*) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x^2-9)(x-3)}{x+5}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{25x^4+7x^3-3}{8x^4+5x+4}$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-2x-1}\right)$ *г*) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x+2}{x-4}-\dfrac{x^2-x}{x^2-3x-4}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x+x^3}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+5\pi/2)\cdot tg\,x}{arctg\,2x^2}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x\cdot\sin^2 x)^{1/\ln(1+\pi x^3)}$

л) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{\frac{6}{1+x}}$

4.1.13. *а*) $\lim\limits_{x\to 3}\left(-x^2+2x-\dfrac{1}{6}\right)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2+11}{13x^3-5x-7}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{3x^5+8x^2-5}+\sqrt[3]{2x^2-x}}{\sqrt[8]{x^9+10x-1}-\sqrt{x+5}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-x-1}{4x^2-7x+3}\right)$

д) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2\,2x}{x\sin 3x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4arctg\,3x}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^{7x}}{tg\,3x-x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-5^{\arcsin x^3}\right)^{\cos ec^2 x/x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$

4.1.14. *а*) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)(x-5)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+5x^4-4}{3x^4+6x+11}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2+3}+\sqrt[5]{x^3-4x+5}}{\sqrt[4]{3x^2+5x-4}+\sqrt[4]{3x^2-x-1}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 1/2}\left(\dfrac{8x^3-1}{4x^2-4x+1}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\left[\ln(x-3)-\ln(x+1)\right]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos(\pi(x+1)/2)}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{-x}}{tg\,2x-\arcsin x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg(x+\dfrac{\pi}{3})\right)^{x+2}$

4.1.15. *а*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x^2-4)(x+2)}{3x-4}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5+7x^4-12}{3x^5+6x^3-13x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+4x+5}-\sqrt{x^3-1}\right)$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0{,}1}\dfrac{10x^2-21x+2}{x^2+0{,}9x-0{,}1}$

д) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2-arctg\,2x^2}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x+3}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x}}{tg\,\pi x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\arcsin^2 x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{ctg\,\pi x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$

4.1.16. *а*) $\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2-2x-3\right)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3+7x^2+5}{23x-17x^3+8}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{arctg^2(-3x)}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[10]{x^{11}+8x^{10}+5}+\sqrt[7]{x^{12}+7x^2+5}}{\sqrt[8]{x^9+x^5+1}+\sqrt{x+8}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 7}\left(\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-14x+49}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(2x+1)-\ln(2x-1)\right]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{3arctg\,x}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 3x-\sin 5x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\ln(1+\sin^2 x)}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin(x+2))^{3/(3+x)}$

4.1.17. *а*) $\lim\limits_{x\to 5}(x-10)(x+7)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5+x^4-19}{12x^3+10x^5+2}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^4+8x^3-5}+\sqrt[6]{x^5+4x+5}}{(x^2+5)\sqrt[3]{x^6+3x+2}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to -5}\left(\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-x-30}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-2}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\cos 3x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{tg\,x+x^3}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/\ln(1+tg^2(\pi x/3))}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$

4.1.18. *а*) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{(x-4)(2x+7)}{x-6}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+17x^2+9}{5x^4+6x-3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2+8}-\sqrt{x^4+x+3}\right)$ *г*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-2x-8}$

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2x+1}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{\ln^2(1+3x)}$ *и)* $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln tg\, x}{\cos 2x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2tg\, x-\arcsin x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-\cos ec^2 x}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^4+5}{x+10}\right)^{\frac{4}{x+2}}$

4.1.19. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x-3\right)$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x^2+5}{6x^3+3x^4-4}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg 2x$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{6x^7+2x^5-4}-\sqrt[3]{4x^2-3x}}{\sqrt[6]{7x^5-6x^4-3}+\sqrt[3]{x+5}}$ *г)* $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3x}{2x+1}-\dfrac{-3x-5}{2x^2+3x+1}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{3x}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\left[\ln\left(3x-1\right)-\ln(3x+1)\right]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$ *и)* $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{arctg\, 3x-5x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{1/\ln\cos x}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{11x+8}{12x+1}\right)^{\cos^2 x}$

4.1.20. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\left(x+4)(3x-6\right)$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+4x-3}{6x^3+5x+100}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{6x^5+5x^4-3}+\sqrt[5]{x^6+5x+3}}{\sqrt[6]{4x^{10}-7x^5+10}+x+\sqrt{x-3}}$ *г)* $\lim\limits_{x\to 17}\left(\dfrac{x^2-18x+17}{x^2-16x-17}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt[3]{2x+2}-2}$ *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg5x}{arctg^2(2x)}$ *ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x}\right)^{5x+2}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}$ *и)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-tg\, x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$ *м)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{\frac{2}{x+1}}$

4.1.21. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x^2-27\right)\left(x+8\right)}{x+8}$ *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-7x^3+8}{5x^3-x^2-10}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-5}-\sqrt{x^2-x+10}\right)$ *г)* $\lim\limits_{x\to-8/3}\dfrac{9x^2+48x+64}{3x^2+5x-8}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{x^2}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x\cdot\sin x}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-tg\,x^3}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{ctg^2 x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)^{\frac{3}{x+8}}$

4.1.22. *а*) $\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^2-2x+4\right)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-4x+7}{6x^7+2x-10}$ *е*) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x^3-4x+3}-\sqrt[5]{x^6+x-3}}{\sqrt{2x^3+3x-1}-\sqrt[4]{3x^5+4x-2}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{3x+2}{x-4}-\dfrac{2x^2-3}{x^2-3x-4}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt[3]{2x+4}-2}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+3)\right]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-tg\,x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos x}\right)^{\cos ec^2 x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{x}{\pi}\right)^{1+x}$

4.1.23. *а*) $\lim\limits_{x\to -3}\left(x+4)(2x-7\right)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x+10}{2x^3+15x+21}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x^3-4x+3}+\sqrt[5]{x^6+x-3}}{\sqrt[5]{x^4+3x^3-5}+\sqrt[4]{2x^6+x^5+7}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to -7}\left(\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+5x-14}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$ *е*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{1-x}\right)^{3x-2}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$ *и*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\,\pi x}{x+2}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\ln(1-3x)}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(2-5^{arctg\,x^3})^{1/\ln(1+\sin^3 x)}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{2(x+5)}$

4.1.24. *а*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2x+3)(4-x)}{x-1}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x^3-6x^2-3}{3x^2-x+100}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-x+5}-\sqrt{3x^2+2x-3}\right)$ *г*) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2-10x+3}{9x^2-6x+1}$

д) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x-h}-\sqrt[3]{x}}{h}$ *е*) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2+1}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos(x/2)}{\sqrt{x+1-\pi}-1}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{\sin 3x-tg\,2x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/(1-\cos\pi x)}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{arctg\,3x}{x}\right)^{x+2}$

4.1.25. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}(5-x^2-2x)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+4x-7}{5x^2+6x^3+3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2+4x-2}-\sqrt{x^5+3x^2+2}}{\sqrt[3]{x^7-14x^5+10}+\sqrt[7]{x^2-x-2}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+1}{2x-4}-\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-2}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)[\ln(3x+1)-\ln(3x+5)]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x-tg^2 x}{\cos x-1}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{3x}-2^{3x}}{arctg\,2x-7x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln(1-(arctg\sqrt{x})^6))^{1/x^3}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\cos x}$

4.1.26. *а*) $\lim\limits_{x\to 11}\left(\dfrac{1}{22}x-1)(5x+6\right)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-5x+4}{3x^4+2x-2}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+4x-2}+\sqrt[5]{x^3-4x+3}}{\sqrt[3]{7x^3+5x+4}+\sqrt{x+5}}$ г) $\lim\limits_{x\to 1/5}\left(\dfrac{5x^2+4x-1}{5x^2-6x+1}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-4}-1}{\sqrt{x+4}-3}$ *е*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{x/3}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{arctg(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/arctg^2 3x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x^2}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x+6}}$

4.1.27. *а*) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{(4x+80)(x-5)}{2x-10}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+7x+2}{8x^2-2x+5}$

г) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{9x^2-1}{9x^2-6x+1}$ *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{7x^2+5x-4}-\sqrt{7x^2-x+6}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin 2x}{x(1-\cos 2x)}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-tg\,x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln(1+\sin^{1/3}x))^{x/\sin x^{4/3}}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\frac{e^x-1}{x}}$

4.1.28. *а*) $\lim\limits_{x\to 12}\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}\right)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+5x^4-3}{3x^3+5x^5+4}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 2x}{x\sin(-3x)}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{7x^3+4x^2-3}+\sqrt[5]{x^6+12x^3-17}}{\sqrt{3x^2+4x-2}+\sqrt[7]{2x^4+3x^3+5}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{x-2}-\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{1-x}-2}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)[\ln x-\ln(x+5)]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 2x-\sin x}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2 x)^{1/\ln(1+3x^2)}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{ctg^2 x}$

4.1.29. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2}x+5\right)(3-x)$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+7x^2-2}{6x^3+5x+100}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+4x^3-5}+\sqrt[3]{3x^4+5x-3}}{\sqrt[4]{7x^{10}+x+10}-\sqrt[6]{x^2+x+2}}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{4x^2+3x-1}{4x^2-17x+4}$

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$ *е*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x}\right)^{3x+1}$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$ *и*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x+tg\,x^2}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{1/tg^2 x}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+8x}{2+11x}\right)^{\frac{1}{x^2+1}}$

4.1.30. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x+3)(4x-3)}{5-x}$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-14x+12}{13x^4+7x-3}$ *д*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x-3}-\sqrt{2x^2-3x}\right)$ *г*) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{7}}\left(\frac{49x^2-28x+4}{7x^2-9x+2}\right)$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{tgx}$ *ж*) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\left[\ln x-\ln(x+5)\right]$

з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(e^{\pi x}-1)}{\sin 3x}$ *и*) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{tg\,3x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$

л) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)^{1/\ln(1+tg^2 3x)}$ *м*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin^2 x}{arctg^2 4x}\right)^{2x+1}$

РОЗДІЛ 5

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

5.1. Похідна

Похідною функції y=f(x) у точці x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу наближається до нуля.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

5.1.1. Правила обчислення похідних

Нехай функції $u = \varphi(x)$ й $v = \psi(x)$ мають у певній точці похідні u', v'. Тоді функції

1. y=cu, (c=const); 2. y=u± v; 3. y=uv; 4. $y = \frac{u}{v}, \quad v \neq 0$

також мають похідні в цій точці, які обчислюються за формулами:

$$1)\,(cu)' = cu';\; 2)\,(u \pm v)' = u' \pm v';\; 3)\,(u \cdot v)' = u'v + uv';\; 4)\,\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0.$$

Нехай функція $u = \varphi(x)$ має в деякій точці x_0 похідну $u'_x = \varphi'(x_0)$, а функція $y = f(u)$ має у відповідній точці $u_0 = \varphi(x_0)$ похідну $y' = f'(u_0)$. Тоді *складна функція* $y = f(\varphi(x))$ в згаданій точці x_0 також буде мати похідну, рівну

$y'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$ або $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Похідна оберненої функції

Якщо функція $y = f(x)$ задовольняє умовам теореми про існування *оберненої функції*, і в точці x_0 має скінченну похідну $f'(x_0) \neq 0$, то для оберненої функції $x=g(y)$ у відповідній точці $x_0=g(y_0)$ також існує похідна рівна

$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$ або $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Нижче представлена таблиця 5.1 похідних елементарних функцій у припущенні, що аргумент u є деяка функція від x: $c' = 0$.

Таблиця 5.1.

1. $(cu)=cu'$;
2. $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$;
3. $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;
4. $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$;
5. $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$;
6. $\left(\ln u\right)'=\dfrac{u'}{u}$;
7. $\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$;
8. $\left(e^u\right)'=e^u u'$;
9. $\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$;
10. $\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$;
11. $\left(tgu\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;
12. $\left(ctgu\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$;
13. $\left(\arcsin u\right)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
14. $\left(\arccos u\right)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
15. $\left(arctgu\right)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$;
16. $\left(arcctgu\right)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$;
17. $\left(shu\right)'=chu\cdot u'$;
18. $\left(chu\right)'=shu\cdot u'$;
19. $\left(thu\right)'=\dfrac{u'}{ch^2u}$;
20. $\left(cthu\right)'=-\dfrac{u'}{sh^2u}$

Приклади. Знайти похідні наступних функцій

1) $y=ln\ sinx$

Оскільки $\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot u',\quad u'=\left(\sin x\right)'=\cos x$, то $y'=\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x$.

2) $y=tg^{12}\sqrt[3]{\cos x+4x}$

Дана функція є степеневою функцією, основа якої є складна функція, тому обчислення похідної будемо виконувати послідовно, використовуючи правила диференціювання складної функції.

$$y'=12tg^{11}\sqrt[3]{\cos x+4x}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\cos x+4x}}\cdot\frac{1}{3}\left(\cos x+4x\right)^{-2/3}\left(-\sin x+4\right).$$

3) $y=arctg\left(3x+5\right)\cdot 3^{\sin^2 2x}+\dfrac{x^{\frac{5}{8}}}{\lg\left(1+tgx\right)}$.

Дана функція є сумою, перший доданок якої у свою чергу є добуток, а другий - частка. Тому послідовно використаємо правила диференціювання суми, добутку, частки, а також складної функції.

$$y'=\frac{3\cdot 3^{\sin^2 2x}}{1+(3x+5)^2}+arctg(3x+5)\cdot 3^{\sin^2 2x}\ln 3\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2+$$

$$+\frac{\frac{5}{8}x^{-\frac{3}{8}}\lg(1+tgx)-x^{\frac{5}{8}}\frac{1}{1+tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\ln 10}}{\lg^2(1+tgx)}.$$

5.1.2. Диференціювання неявних функцій

Якщо рівняння

$F(x,y)=0$ (5.1.1)

перетворюється в тотожність, коли в ньому y заміняється функцією *f(x)*, то говорять, що *y=f(x)* є *неявна функція*, визначена даним рівнянням (5.1.1). Для того щоб знайти похідну y' функції *y=f(x)*, заданої неявно рівнянням (5.1.1.), треба продиференціювати обидві частини тотожності $F(x,y(x))\equiv 0$ по змінній *x*, користуючись правилом диференціювання складної функції. Потім отримане рівняння розв'язати відносно y'.

Приклад. Знайти похідну функції, заданої рівнянням

$\sqrt{x}\cdot y+\sin x\cdot tgy=0$.

Диференціюванням по *x* знаходимо

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}y+\sqrt{x}y'+\cos x tgy+\sin x\frac{y'}{\cos^2 y}=0,\left(\sqrt{x}+\frac{\sin x}{\cos^2 y}\right)y'=-\frac{y}{2\sqrt{x}}-\cos x tgy,$$

$$y'=-\frac{\left(y+2\sqrt{x}\cos x tgy\right)\cos^2 y}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\cos^2 y+\sin x\right)}.$$

5.1.3. Логарифмічне диференціювання. Нехай функція *y=f(x)* має похідну $y'=f'(x)$, яку важко обчислити за допомогою раніше наведених правил і формул, але натуральний логарифм даної функції *ln f(x)* є функція, що диференціюється без особливих утруднень. Тоді для знаходження похідної застосовується метод логарифмічного диференціювання, який полягає в послідовному логарифмуванні вихідної функції *ln y=ln f(x)*, а потім диференціюванні її, як функції, заданої неявно. Тоді якщо $\ln y=\varphi(x)$, то

$\frac{y'}{y}=\varphi'(x)$, звідки знаходимо $y'=y\cdot\varphi'(x)$ або $y'=f(x)\cdot\varphi'(x)$

Приклади. Знайти похідні функцій:

1. $y=\left(x^3+5x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

Формули для диференціювання даної функції в таблиці немає. Скористаємося методом логарифмічного диференціювання. Прологарифмуємо цю функцію: $\ln y=\frac{1}{x}\ln\left(x^3+5x^2\right)$

Диференціюючи обидві частини рівності, знаходимо

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\ln\left(x^3+5x^2\right)+\frac{1}{x}\cdot\frac{3x^2+10x}{x^3+5x^2}$$, звідки

$$y'=\left(x^3+5x^2\right)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln\left(x^3+5x^2\right)+\frac{3x+10}{x^3+5x^2}\right)$$

2. $y=\sqrt[3]{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}}$.

Безпосереднє обчислення похідної даної функції є громіздким, у той час, як натуральний логарифм у легко диференціюється. Прологарифмуємо цю функцію:

$$\ln y=\frac{1}{3}\left(\ln x+\ln\left(x^2+1\right)-2\ln\left(x^2-1\right)\right).$$

Диференціюємо обидві частини тотожності, розглядаючи у як функцію від х, тоді:

$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-2\frac{2x}{x^2-1}\right)$, звідки $y'=\sqrt[3]{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-2\frac{2x}{x^2-1}\right)$.

5.1.4. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної і нормалі

Похідна функції в даній точці чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої в цій точці. Звідси випливає, що *рівняння невертикальної дотичної* до кривій *y=f(x)* у точці $M_0\left(x_0,y_0\right)$ має вигляд

$$y-y_0=y'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$$

Рівняння вертикальної дотичної $x=x_0$.

Нормаллю до кривої в точці $M_0\left(x_0,y_0\right)$ *називається пряма, перпендикулярна до дотичної, проведеної до цієї кривої в заданій точці.* Рівняння *негоризонтальної нормалі* має вигляд $y-y_0=-\frac{1}{y'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right)$.

Рівняння *горизонтальної нормалі* $y=y_0$.

Приклад. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3-3x^2-2$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

Ордината точки дотику $y_0=1^3-3\cdot1^2-2=-4$. Кутовий коефіцієнт дотичної $k=y'\big|_{x=1}=\left(3x^2-6x\right)\big|_{x=1}=3-6=-3.$.

Рівняння дотичної y+4=-3(x-1), або *3x+y+1=0.*

Кутовий коефіцієнт нормалі $k_{норм}=-\frac{1}{k_{дотичн.}}=\frac{1}{3}$. Рівняння нормалі

$y+4=\frac{1}{3}\left(x-1\right)$, або *x-3y-13=0.*

5.2. Диференціал функції

Функція $y=f(x)$ називається диференційовною у даній точці x, якщо приріст Δy цієї функції в точці x, що відповідає приросту аргументу Δx, може бути представлений у вигляді

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x, \qquad (5.2.1)$$

де A – деяке число, що не залежить від Δx, а α – функція аргументу Δx**,** що є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$. Головна частина приросту функції $A\cdot\Delta x$, лінійна відносно Δx, називається *диференціалом функції* й позначається $dy = A\cdot\Delta x$.

Теорема. Для того щоб функція $y=f(x)$ була *диференційовною* в даній точці x, необхідно й достатньо, щоб вона *мала* в цій точці *скінченну похідну*. У процесі доказу цієї теореми з'ясовується зміст A, а саме, установлюється, що $A = y'(x)$.

З огляду на цю рівність, диференціал функції можна записати так:

$$dy = y'\cdot\Delta x. \qquad (5.2.2)$$

На підставі цієї теореми можна ототожнити поняття дифференційовності функції в даній точці з поняттям існування похідної функції в тій же точці. Тому операція знаходження похідної називається *диференціюванням*.

Теорема. Якщо функція $y=f(x)$ *диференційовна* в точці x, то вона й *неперервна* в цій точці. Обернене твердження не завжди вірно. Наприклад, функції у $=|x|$ (рис. 5.1.а), $y=\sqrt[3]{x}$ (рис. 5.1.б) є неперервними в точці $x=0$, однак вони не диференцційовні в цій точці.

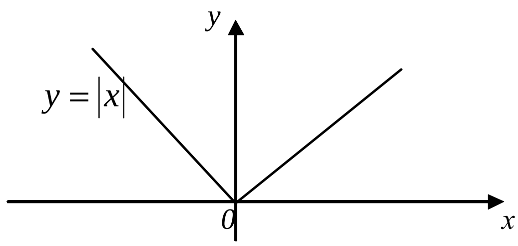


Рис. 5.1.а

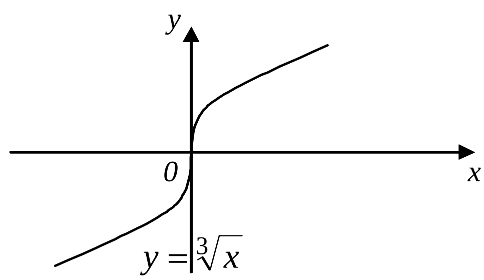


Рис. 5.1.б

Диференціал незалежної змінної x дорівнює її приросту, $dx=\Delta x$, тому

$$dy = y'dx. \qquad (5.2.3.)$$

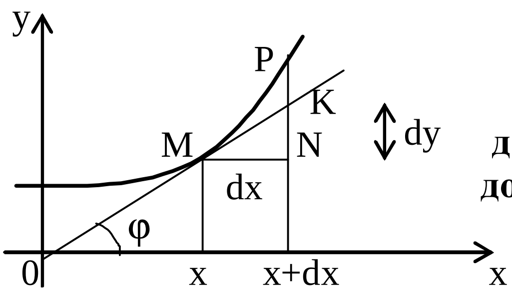
Із цієї формули маємо $y' = \dfrac{dy}{dx}$, тобто похідну від функції y по x можна розглядати як частку від ділення диференціала функції y на диференціал (приріст) незалежної змінної dx.

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \ln tg\sqrt{x}$,

Розв'язання. $dy = \dfrac{dx}{tg\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}} = \dfrac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sin 2\sqrt{x}}$.

5.2.1. Геометричний зміст диференціала функції

З формули (5.2.2) випливає, що диференціал функції* y=f(x) *дорівнює $dy = f'(x)dx$***. З огляду на те, що*** $f'(x) = tg\varphi$ ***(рис.5.2.), одержуємо* dy=tgφ·dx.**



***Звідси:* геометричний зміст диференціала полягає в тому, що він дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до кривої y=f(x) в точці з абсцисою x при переході від точки дотику в точку з абсцисою x+dx *(*dy=|KN|).**

5.2.2. Інваріантість форми диференціала 1-го порядку

Нехай задана функція $y=f(x)$, де $x=\varphi(t)$, тобто $y=f(\varphi(t))$ є складною функцією. Припустимо, що f і φ – диференційовні функції. Обчислимо dy

$dy = y'_t dt = f'_x x'_t dt = \|x'_t dt = dx\| = f'_x dx = f'(x)dx$.

Таким чином, диференціал функції виражається однієї й тією ж формулою як у випадку функції від незалежної змінної, так і у випадку функції від функції. Цю властивість диференціала називають *інваріантістю* формули (або форми) диференціала. Варто звернути увагу на те, що інваріантна (незмінна) саме форма диференціала, оскільки в змісті формули диференціала функції від функції є істотна відмінність від змісту формули диференціала функції від незалежної змінної. Саме, у формулі $dy = f'(x)dx$ dx є не тільки диференціал, але й приріст Δx аргументу x, якщо x – незалежна змінна, і dx є диференціал x, але не приріст Δx, якщо аргумент x є у свою чергу функція деякої змінної t.

5.2.3. Застосування диференціала до наближених обчислень

При достатньо малому Δx можна замінити приріст функції її диференціалом, тобто $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$

і звідси знайти наближене значення шуканої величини за формулою

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

Приклад. Обчислити приблизно arctg 0,97.

Розв'язання.

$$arctg(x_0+\Delta x)\approx arctg x_0+arctg'(x_0)\Delta x;$$

$$x_0+\Delta x=0,97;\ x_0=1;\ \Delta x=-0,03;\ (arctg\,x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

$$arctg0,97\approx arctg1-\frac{0,03}{1+1^2}=\frac{\pi}{4}-0,015\approx 0,7554.$$

5.3. Похідні й диференціали вищих порядків

Нехай функція $y=f(x)$ диференційовна на деякому проміжку (a,b). Значення похідної $f'(x)$, загалом кажучи, залежить від x, тобто похідна від $f'(x)$ є теж функція від x. Якщо ця функція сама є диференційовною у деякій точці x інтервалу (a,b), тобто має в цій точці похідну, то зазначена похідна називається другою похідною (або похідною другого порядку) і позначається $y''=(y')'=f''(x)$.

Аналогічно можна ввести поняття третьої похідної, потім четвертої й т.д.

Похідною n-го порядку називається похідна від похідної (n-1)-го порядку: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$.

Для похідних n- го порядку справедливі правила

1.2. $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}\qquad (cu)^{(n)}=cu^{(n)},\quad c=const$

3. $(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+...+uv^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}c_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$.

Формула 3 називається *формулою Лейбніца*.

Приклад. $y=e^x\cdot x^2$. Знайти $y^{(40)}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу Лейбніца, приймемо $u=e^x$, $v=x^2$. Похідна будь-якого порядку від функції e^x дорівнює e^x, отже $\left(e^x\right)^{(40)}=e^x$.

$$y^{(40)}=\left(e^x\cdot x^2\right)^{(40)}=\left(e^x\right)^{(40)}\cdot x^2+40\cdot\left(e^x\right)^{(39)}\cdot 2x+\frac{40\cdot 39}{1\cdot 2}\left(e^x\right)^{(38)}\cdot 2=e^x\left(x^2+80x+1560\right).$$

Нехай задана функція $y=f(x)$, де x незалежна змінна. Диференціал цієї функції $dy=y'dx$ є деяка функція від x, при цьому від x залежить тільки y'. Якщо y', у свою чергу, диференційовна функція, то можна визначити диференціал другого порядку. Диференціалом другого порядку називається диференціал від диференціала функції:.

$d(dy)=d(y'dx)=y''dx^2=d^2y$

або

$d^2y = y''dx^2$.

Взагалі, диференціалом *n-го* порядку називається перший диференціал від диференціала *(n-1)*-го порядку.

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right) = y^{(n)}dx^n . \qquad (5.3.1)$$

Користуючись диференціалами різних порядків, похідну будь-якого порядку можна представити як відношення диференціалів відповідного порядку:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}; \quad y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}; \ldots \quad y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}; \qquad (5.3.2)$$

Рівності (5.3.1), (5.3.2) при $n>1$ вірні тільки в тому випадку, коли x є незалежною змінною.

5.3.1. Диференціювання параметрично заданих функцій

Якщо функція задана *параметрично:* $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t); \end{cases}$, то її похідну по змінній x можна представити в такий спосіб:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ тобто } \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (5.3.3)$$

Для знаходження другої похідної застосуємо теорему про похідну складної функції. З огляду на те, що y'_x є функцією від t, одержимо: $y''_{xx} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{dy'_x}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$.

За теоремою про похідну оберненої функції одержимо: $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{x'_t}$.

Отже, $y''_{xx} = \frac{dy'_x}{dt}\cdot\frac{1}{x'_t}$; (*) Скориставшись правилом диференціювання дробу, одержимо:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}\cdot x' - x''_{tt}\cdot y'_t}{\left(x'_t\right)^3}. \qquad (5.3.4)$$

Аналогічно можна одержати похідну y по x будь-якого порядку.

Приклад. Знайти похідну y''_{xx} функції заданої параметрично: $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$

Тоді $x'_t = a(1-\cos t)$, $y'_t = a\sin t$, й $y'_x = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$. Для знаходження y''_{xx} використаємо формулу (*), що дасть:

$$y''_{xx}=\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)'_t\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{a(1-\cos t)^3}=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}.$$

При розв'язанні цього приклада ми повторили виведення формули для окремого випадку. Але можна було одержати другу похідну, користуючись готовою формулою (5.3.4).

5.4. Застосування похідних до дослідження функцій і побудови графіків, знаходження границь

5.4.1. Теореми про середнє

Теорема Ролля. *Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a,b], має похідну в інтервалі (a,b) і на кінцях відрізка [a,b] приймає рівні значення, то в інтервалі (a,b) існує принаймні одна точка, у якій похідна даної функції дорівнює нулю.*

На рис. 5.3. представлена геометрична ілюстрація теореми Ролля.

Теорема Лагранжа. *Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a,b] і має похідну $f'(x)$ в інтервалі (a,b), то існує принаймні одна така точка ξ в інтервалі (a,b), що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

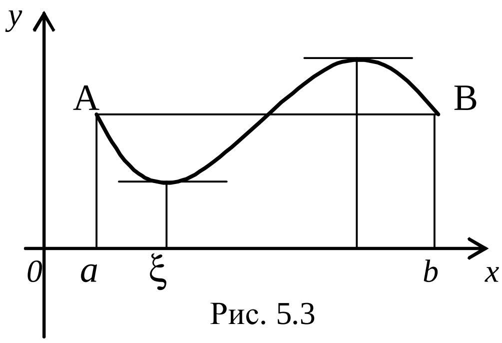


Рис. 5.3

Теорема Коші. *Якщо функції f(x) і φ(x) неперервні на відрізку [a,b], мають похідні $f'(x)$ й $\varphi'(x)$ в інтервалі (a,b), причому $\varphi'(x)\neq 0$, то в інтервалі (a,b) існує принаймні одна точка ξ, така, що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},\ \text{де } a<\xi<b.$$

Теорема Коші є узагальненням теореми Лагранжа.

5.4.2. Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

Правило Лопіталя для розкриття невизначеностей виду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ й $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ сформульовано у вигляді теореми:

Теорема. *Нехай однозначні функції $f(x)$ й $\varphi(x)$ диференційовні всюди в деякому околі точки a, тобто при $0<|x-a|<\varepsilon$, причому $\varphi'(x)\neq 0$, тоді, якщо існує границя (скінченна або нескінченна) відношення похідних, то відношення функцій має ту ж границю, тобто*

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\left\|\dfrac{0}{0}\right\| \text{ або } \left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|\right)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\left\|\dfrac{0}{0}\right\| \text{ або } \left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження. Підкреслимо ще раз, що існування границі відношення похідних гарантує існування границі відношення функцій. Обернене твердження невірно, оскільки *границя відношення функцій може існувати при відсутності границі відношення похідних*.

Приклад 1. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

Розв'язання. Правило Лопіталя в цьому випадку незастосовно, оскільки відношення похідних $\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$ не має границі при $x\to\infty$.

З того, що границя відношення похідних не існує не можна зробити висновок , що шукана границя не існує. Дійсно, границя даної функції може бути обчислена безпосередньо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\cos x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}\left\|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0,\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0\end{matrix}\right\|=1.$$

Приклад 2. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Розв'язання. Обчисливши границю безпосередньо, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|\left\|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1-\text{величина обмежена }=1;\quad \lim_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0\right\|\left\|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\\ 1\cdot 0=0\end{matrix}\right\|$$

Тут $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$, оскільки x — нескінченно мала величина, а $\sin\dfrac{1}{x}$ — величина обмежена. Границя функції існує, але вона не може бути обчислена за правилом Лопіталя, оскільки відношення похідних

$\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}}{\cos x}$ не має границі при $x\to 0$.

Обчислити границі функцій, користуючись правилом Лопіталя.

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}\cdot a+\sin\alpha x\cdot\alpha}{e^{\beta x}\cdot\beta+\sin\beta x\cdot\beta}=\left\|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0}\sin\alpha x=0;\ \lim\limits_{x\to 0}e^{\alpha x}=1;\\ \lim\limits_{x\to 0}\sin\beta x=0;\ \lim\limits_{x\to 0}e^{\beta x}=1.\end{matrix}\right\|=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Приклад 2. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-tgx}\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|.$

Відзначимо, що при знаходженні границь за правилом Лопіталя доцільна заміна еквівалентними нескінченно малими, заміна функцій їх скінченними границями, відмінними від 0, тотожні перетворення виразів із метою їх спрощення.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos^2 x}{\cos^2 x-1}\left\|\lim_{x\to 0}\cos^2 x=1\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\cos x-1)(\cos x+1)}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 3. $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^x\right)'-1}{\dfrac{1}{x}-1}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|.$

Для знаходження похідної функції x^x застосуємо логарифмічне диференціювання.

Нехай $y_1 = x^x$, тоді $\ln y_1 = x\ln x$,

$$\frac{y_1'}{y_1}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1,\ y_2'=\left(x^x\right)'=x^x(\ln x+1);$$

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{\dfrac{1}{x}-1}=\left\|\frac{0}{0}\right\|;$$

Правило Лопіталя можна застосувати повторно, якщо відношення похідних знову приведе до невизначеності й при цьому виконуються умови застосовності правила Лопіталя.

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^x\right)'(\ln x+1)+x^x\cdot\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)'+x^{x-1}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-2.$$

Приклад 4.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cos x\ln(x-3)}{\ln\left(e^x-e^3\right)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\cos 3\lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{1}{x-3}}{\dfrac{1}{e^x-e^3}e^x}=e^{-3}\cos 3\lim_{x\to 3}\frac{e^x-e^3}{x-3}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$$

$$=e^{-3}\cos 3\lim_{x\to 3}\frac{e^x}{1}=\cos 3.$$

Приклад 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{-\sin x+x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{-\cos x+1}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1.$$

Розкриття невизначеностей виду $\|0\cdot\infty\|$ й $\|\infty-\infty\|$

Розкриття невизначеностей виду $\|0\cdot\infty\|$ *й* $\|\infty-\infty\|$ *проводять за допомогою тотожних перетворень, які приводять ці невизначеності до виду* $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ *або* $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$, *а потім застосовують таблицю еквівалентних нескінченно малих величин і правило Лопіталя.*

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx=\|0\cdot\infty\|=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{ctgx}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-1.$

Приклад 7. $A=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\|\infty-\infty\|.$

Перетворимо вираз, що знаходиться під знаком границі, з метою одержання невизначеності $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{1\cdot\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 8.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2\cos x}-\frac{x}{ctgx}\right)=\|\infty-\infty\|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x\sin x}{\cos x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1\cdot\sin x-x\cos x}{-\sin x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=1.$$

Розкриття невизначеностей виду 1^∞, ∞^0, 0^0

Для розкриття невизначеностей виду 1^∞, ∞^0, 0^0 *виконуються попередні перетворення степенево-показникової функції за основною логарифмічною тотожністю* $A=e^{\ln A}$.

У результаті даного перетворення одержуємо:

1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{\varphi(x)}=\|1^\infty\|=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)\|\infty\cdot 0\|}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{1/\varphi(x)}\left\|\frac{0}{0}\right\|}$;

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{\varphi(x)}=\|\infty^0\|=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)\|0\cdot\infty\|}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{1/\varphi(x)}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{\varphi(x)}=\|0^0\|=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)\|0\cdot\infty\|}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{1/\varphi(x)}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|}$.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\|1^\infty\|=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)\left\|\frac{0}{0}\right\|}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}}=e^2.$

Приклад 2.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}=\left\|\infty^{0}\right\|=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\ln tgx}=\left\|e^{0\cdot\infty}\right\|=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln tgx}{(2x-\pi)^{-1}}}=\left\|e^{\frac{\infty}{\infty}}\right\|=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^{2}x}}{-(2x-\pi)^{-2}\cdot 2}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)^{2}}{\underbrace{\sin x}_{\to 0}\cdot\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(2x-\pi)\cdot 2}{-\sin x}}=\left\|e^{0}\right\|=1$$

Приклад 3. $A=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}=\left\|0^{0}\right\|=e^{\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)\left\|0\cdot\infty\right\|}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\ln^{2}\tilde{o}\cdot\tilde{o}}{x-1}\left\|\frac{0}{0}\right\|}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-2\ln\tilde{o}\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\ln^{2}\tilde{o}}{1}}=e^{0}=1$$

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}=\left\|1^{\infty}\right\|=e^{\lim\limits_{x\to 1}tg\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{ctg\frac{\pi x}{2}}\left\|\frac{0}{0}\right\|}=e^{\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{1}{\sin^{2}\frac{\pi x}{2}}}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$

$$=e^{\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{1}{\sin^{2}\frac{\pi x}{2}}}}=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Приклад 5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{7}{x}}=\left\|1^{\infty}\right\|=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{7}{x}\ln(1+2x)\left\|\frac{0}{0}\right\|}=e^{7\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1+2x}}=e^{14}.$

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(2^{x}-1)}}\left\|0^{0}\right\|=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(2^{x}-1)}\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{x}-1}{2^{x}\cdot x\ln 2}\left\|\frac{0}{0}\right\|}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{x}\ln 2}{\ln 2}}=e^{1}=e.$

Зауваження. Існує ряд границь, у яких невизначеність може бути усунута тільки за допомогою правила Лопіталя.

Приведемо деякі з них.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot 2\cdot\sin 3x}{\sin 2x\cdot\cos 3x\cdot 3}\left\|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=1;\\ \lim\limits_{x\to 0}\cos 3x=1;\\ \sin 2x\sim 2x;\ \sin 3x\underset{x\to 0}{\sim}3x\end{matrix}\right\|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot 3x}{2x\cdot 3}=1.$

Приклад 2. Обчислити границю функції $y=\frac{a^{x}}{x^{n}},\ n\in N$ **при** $x\to\infty$**.**

Нехай $a>1$, тоді

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{x}}{x^{n}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{x}\ln a}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{x}(\ln a)^{2}}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{x}(\ln a)^{n}}{n!}=+\infty,$$

Тут правило Лопіталя застосоване n раз.

Якщо $0<a<1$, те $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=0$, якщо $0<a<1, \quad n\in N$.

Приклад 3.

$$\lim_{x\to+0}x^n\log_a x=\|0\cdot\infty\|=\lim_{x\to+0}\frac{\log_a x}{x^{-n}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x\ln a}\cdot\frac{1}{(-n)x^{-n-1}}=$$

$$=-\frac{1}{n\ln a}\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{-n}}=-\frac{1}{n\ln a}\lim_{x\to+0}x^n=0, \quad a>0, \quad a\neq 1, \quad n\in N.$$

5.4.3. Умови монотонності функції. Екстремуми

Теорема 1. Нехай *f(x)* неперервна на *[a, b]* і диференційовна на *(a,b)*. Для того щоб функція *f(x)* була постійною на *[a,b]* необхідно й достатньо, щоб $f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$.

Теорема 2. Нехай *f(x)* неперервна на *[a,b]* і диференційовна на *(a,b)*, тоді *а)* якщо $f'(x)>0\ \forall x\in(a,b)$, то *f(x)* зростає; б) якщо $f'(x)<0\ \forall x\in(a,b)$, то *f(x)* спадає.

Теорема 3. Якщо диференційовна на інтервалі *(a,b)* функція *f(x)* зростає, то $f'(x)\geq 0\ \forall x\in(a,b)$. Якщо функція *f(x)* спадає, то $f'(x)\leq 0\ \forall x\in(a,b)$.

Точка x_0 називається точкою *локального максимуму* (*мінімуму*) функції *y=f(x)*, якщо існує такий її окіл $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, у якрму $f(x_0)$ є найбільшим (найменшим) серед всіх інших значень цієї функції. Точки локального максимуму й мінімуму функції називаються точками *екстремума* цієї функції.

Теорема 4. (*Необхідна ознака існування екстремума.*)

Якщо неперервна функція *f(x)* має в точці $x=x_0$ екстремум, то похідна функції $f'(x_0)=0$ або не існує. *Точки*, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними*.

Теорема 5. (*Достатня ознака існування екстремума функції по першій похідній*).

Нехай x_0 – критична точка. Тоді, якщо функція *f(x)* має похідну $f'(x)$ в деякому околі точки x_0 і якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 міняє знак із плюса на мінус, то функція в цій точці має максимум, а при зміні знака з мінуса на плюс – мінімум.

Теорема 6. (*Достатня ознака існування екстремума функції по другій похідній*).

Якщо функція *f(x)* у деякому околі точки x_0 неперервна й двічі диференційовна, причому $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$, то, якщо $f''(x_0)>0$, у точці x_0 функція має мінімум; якщо $f''(x_0)<0$, функція в точці x_0 має максимум.

5.4.4. Опуклість і ввігнутість кривої. Точки перегину

Крива називається *опуклою* в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ вона розташована нижче дотичної (рис. 5.4.а), проведеної в точці x_0. Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається *ввігнутою* (рис. 5.4.б).

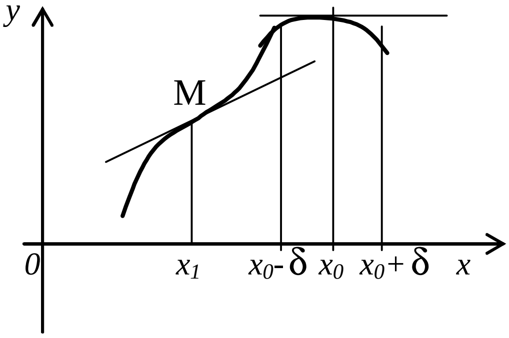


Рис. 5.4.а

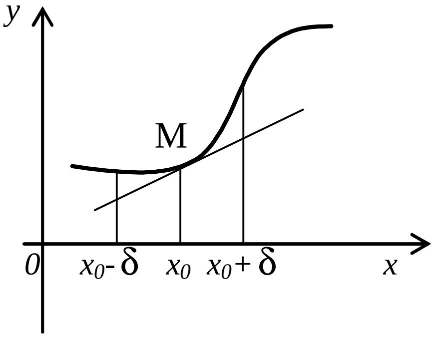


Рис. 5.4.б

Теорема 1. Якщо функція *f(x)* у деякому околі точки x_0 двічі неперервно диференційовна й $f''(x_0)\neq 0$, то необхідною й достатньою умовою опуклості кривої у точці x_0 є умова $f''(x_0)<0$; увігнутості — $f''(x_0)>0$.

Точка $M(x_1, f(x_1))$ називається *точкою перегину* даної кривої (рис. 5.4.а), якщо існує такий окіл точки x_1 що при $x<x_1$ у цьому околі ввігнутість кривій спрямована в одну сторону, а при $x>x_2$ – в іншу сторону (рис.5.4.а)

Для того щоб точка $x=x_0$ була точкою перегину даної кривої необхідно,щоб друга похідна функції в цій точці або була рівна нулю ($f''(x_0)=0$), або не існувала.

Теорема 2. (*Достатня умова існування точки перегину*). Нехай крива визначається рівнянням *y=f(x).* Якщо $f''(x_0)=0$ або $f''(x_0)$ не існує й при переході через $x=x_0$ похідна $f''(x)$ міняє знак, то точка кривої з абсцисою x_0 є точка перегину.

5.4.5. Асимптоти кривих

Пряма $x=x_0$ називається *вертикальною асимптотою,* якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Прямі $x=\pm 1$ – вертикальні асимптоти, оскільки $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{1}{1-x^2}=\mp\infty$; $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{1}{1-x^2}=\pm\infty$.

Під похилою асимптотою графіка функції *y=f(x)* розуміють пряму, що володіє тією властивістю, що відстань від прямої до змінної точки на кривій наближається до нуля, якщо точка, рухаючись уздовж кривої, необмежено віддаляється ($x\to\pm\infty$).

Рівняння *похилої асимптоти* має вигляд $y=kx+b$. Зокрема, якщо $k=0$, асимптот є горизонтальною. Якщо похила асимптот існує, то k і b знаходяться за формулами $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Якщо хоча б одна з границь не існує, то похилих асимптот крива не має. Асимптоти можуть бути різними при $x\to+\infty$ й при $x\to-\infty$.

5.4.6. Загальна схема дослідження функції й побудови графіка

1) Визначення області існування функції;
2) Дослідження функції на неперервність. Визначення точок розриву функції і їхнього характеру. Знаходження вертикальних асимптот.
3) Дослідження функції на парність і непарність.
4) Дослідження функції на періодичність.
5) Знаходження похилих і горизонтальних асимптот.
6) Дослідження функції на екстремум. Визначення інтервалів монотонності функції.
7) Визначення точок перегину функції, інтервалів опуклості й увігнутості.
8) Знаходження точок перетину з осями координат.
9) Дослідження поведінки функції на нескінченності.

Приклад. Побудувати графік функції $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

1) $(x+1)^2\neq 0,\ x\neq -1.$

2) $x=-1$ – точка розриву функції, оскільки $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty$, отже, $x=-1$ – вертикальна асимптот.

3) $y(-x)=\frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2}=-\frac{x^3}{2(-x+1)^2};\ y(-x)\neq y(x),\ y(-x)\neq -y(x)\Rightarrow y(x)$-функція загального виду.

4) Функція неперіодична, оскільки не існує такого числа T, щоб виконувалася рівність $f(x+T)=f(x),\ \forall x\in D(f)$.

5) Похилі асимптоти

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2\left(1+{}^{1}\!/\!{}_{x}\right)^2}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right)\left|\infty-\infty\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{2(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=-1,$$

$y=1/2x-1$ – похила асимптота.

6) Для визначення інтервалів монотонності й екстремумів функції необхідно знайти її першу похідну й визначити точки, у яких вона дорівнює нулю або не існує:

$$y'=\frac{6x^2(x+1)^2-4(x+1)x^3}{4(x+1)^4}=\frac{x^2\left(3x^2+6x+3-2x^2-2x\right)}{2(x+1)^4}=\frac{x^2\left(x^2+4x+3\right)}{2(x+1)^4}$$

$$y'=\frac{x^2(x+1)(x+3)}{2(x+1)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}=0,$$

$x^2=0,\ \ x=0, x+3=0, x=-3, x+1\neq 0, x\neq -1$

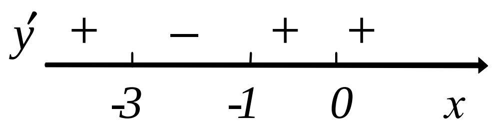


Рис.5.5

При $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$ функція зростає; при $x\in(-3;-1)$ функція спадає $y_{\max}(-3)=-\frac{27}{2\cdot 4}=-\frac{27}{8}$

7) Для визначення інтервалів опуклості (увігнутості) й точок перегину знайдемо другу похідну:

$$y''=\frac{1}{2}\frac{\left(2x(x+3)+x^2\right)(x+1)^3-3(x+1)^2x^2(x+3)}{(x+1)^2}==\frac{1}{2}\frac{3x^3+6x^2+3x^2+6x-3x^3-9x^2}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{3x}{(x+1)^4}=0,\ \ x=0, x\neq -1\ ;$$

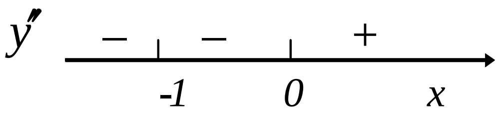


Рис.5.6

При $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)$ графік опуклий; $x\in(0;+\infty)$ графік увігнутий. Точка 0$(0;0)$ – точка перегину.

8) Точки перетину графіка з осями координат: $x=0, y=0$.

9) Досліджуємо поведінку функції на нескінченності: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\pm\infty.$

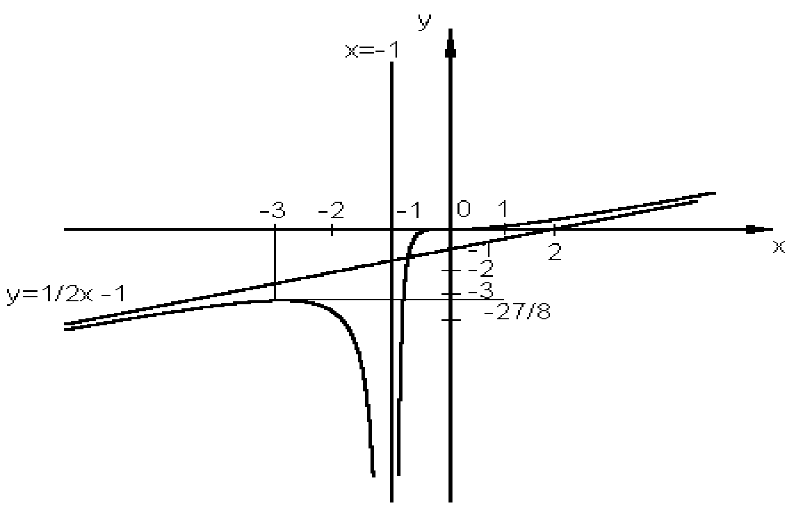


Рис. 5.7.

Контрольні завдання до розділу 5

Завдання 1. В задачах (пункти “1”, “2”,”3”,”4”) знайти похідні даних функцій; у пункті “5” продиференціювати неявно задану функцію; у пункті “6” обчислити приблизно за допомогою диференціала значення функції при даному значенні x; у пункті “7” розв′язати задачу.

5.1.1 1) $y = e^{2x}\operatorname{arctg}2x + \dfrac{\ln x}{x}$; 2) $y = \ln^5\left(\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}\right)$; 3) $y = (\ln x)^{\sin 3x}$;

4) $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}; \end{cases}$ 5) $\sqrt{xy} + \sin x + \sin a = 0$; 6) $y = x^3 + 3x^2 - 7, \quad x = 2{,}03.$

7) До кривої y=xlnx написати рівняння дотичної, паралельної прямій y-x-5=0.

5.1.2. 1) $y = (x^2 - 2x + 3)e^{3x} - \dfrac{x}{\ln x}$; 2) $y = 5^{\arcsin^2(x^3 - x + 1)}$; 3) $y = (\cos 3x)^x$;

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$ 5) $y^3 \sin x + a^2 \cos 2x = 5a$; 6) $y = e^{x^2 - x}, \quad x = 1{,}12.$

7). До кривої y=x-1/x написати рівняння нормалі, паралельної прямій 2y+x+3=0.

5.1.3. 1) $y = x\operatorname{tg}3x - \dfrac{5^x}{\sqrt{7x}}$; 2) $y = \arccos^2\left(\ln\dfrac{x}{1+x^2}\right)$; 3) $y = (\sin 3x)^{\ln x}$;

4) $\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right), \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{cases}$ 5) $y^2 - 2xy + \sin(x + y) = \cos a$; 6) $y = e^{2-x}, \quad x = 1{,}97.$

7) До кривої $y = 2 - \sqrt{x}$ написати рівняння дотичної, перпендикулярної прямій y+4x-4=0.

5.1.4. 1) $y = \dfrac{e^{2x}(\cos 3x + \sin 3x)}{\ln x}$; 2) $y = \sin^3(\cos 3x)$; 3) $y = \left(\sin\dfrac{3}{x}\right)^{x^3}$;

4) $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{t-1}{\sin t}; \end{cases}$ 5) $x^4 + y^4 = x^2y^2$; 6) $y = \left(x^2 - 3\right)^2(x + 2), \quad x = 3{,}011.$

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$ у точці з абсцисою x_0=-1.

5.1.5.

1) $y = x^{\frac{2}{3}} \arccos 2x - \dfrac{2x+3}{\mathrm{tg}3x}$; 2) $y = \ln^3 x + 3^{\mathrm{tg}3x}$; 3) $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$;

4) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t; \end{cases}$ 5) $\sin(x+y) + \cos(x+y) = \sin a$; 6) $y = \arcsin 3x,\ x = 0{,}05.$

7) Написати рівняння дотичної до кривої $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ у точці з абсцисою $x_0=3$.

5.1.6.

1) $y = \sqrt{x}\cos x + \dfrac{3x^2+7}{\arcsin 2x}$; 2) $y = e^{\cos^3\left(\ln\frac{1-x}{x^2}\right)}$; 3) $y = x^{\sin x}$;

4) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$ 5) $x^y = y^x$; 6) $y = \mathrm{arctg}x,\quad x = 0{,}98.$

7) До кривої $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ написати рівняння дотичної, паралельної прямій $y=2x$.

5.1.7.

1) $y = 3^{\sin^2 \ln x}$; 2) $y = \dfrac{x^2 e^{2x}}{\mathrm{arctg}2x}$; 3) $y = x^{\cos 2x}$;

4) $\begin{cases} x = 4 - t^2, \\ y = t - t^3; \end{cases}$ 5) $\cos(xy) = \sin(xy)$; 6) $y = 2^{x-3},\quad x = 2{,}08.$

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$ у точці з абсцисою $x_0=1$.

5.1.8.

1) $y = \dfrac{x\cos 4x}{1+\mathrm{tg}4x}$; 2) $y = \sin^5\left(4^{\mathrm{arctg}2x}\right)$; 3) $y = (\cos 2x)^{\mathrm{tg}2x}$;

4) $\begin{cases} x = t(1-\sin t), \\ y = t\cos t; \end{cases}$ 5) $ye^x - \mathrm{tg}xy = e^a$; 6) $y = \ln x,\quad x = 1{,}13.$

7) До кривої $y=x\cos x$ написати рівняння дотичної, перпендикулярної прямій $y+x+3=0$.

5.1.9

1) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}\,2^x}{1+\cos 5x}$; 2) $y = e^{\sqrt{\cos^3 x}\,\mathrm{tg}3x}$; 3) $y = (\mathrm{tg}3x)^x$;

4) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{t}{t^2-1}; \end{cases}$ 5) $y - x = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$; 6) $y = \sqrt{1+x},\quad x = 3{,}01$

7) До кривої $y = e^{1-x^2}$ написати рівняння нормалі, перпендикулярної прямій $y+2x-4=0$.

5.1.10.

1) $y=\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x+x}}\right)\cos 4x$; 2) $y=\ln^3 tg\frac{x-1}{1-2x}$; 3) $y=(\sin 5x)^{x^5}$;

4) $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t; \end{cases}$ 5) $y\sin x-\cos(x-y)=0$; 6) $y=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}, x=0{,}02.$

7) Написати рівняння нормалі до кривої $y=\sqrt[3]{1-x}$ у точці з абсцисою x_0=1.

5.1.11

1) $y=\left(\sqrt{x+x^3}\right)tg3x$; 2) $y=\cos\left(5^{\ln x}\right)$; 3) $y=\frac{x^3e^{3x}\sin 2x}{\cos 3x}$;

4) $\begin{cases} x=5\cos^3 t, \\ y=5\sin^3 t; \end{cases}$ 5) $x\sin y-\cos y+\cos 2x=0$; 6) $y=\arccos x, \quad x=0{,}01.$

7) До кривої $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$ написати рівняння дотичної, паралельної прямій 2y-x+5=0.

5.1.12.

1) $y=\frac{\arccos 3x}{\arcsin 6x}$; 2) $y=tg^3\sin(\ln 2x)$; 3) $y=\left(1+x^2\right)^{x^3}$; 4) $\begin{cases} x=\frac{3t}{1+t}, \\ y=\frac{3t^2}{1+t^3}; \end{cases}$

5) $x+y=\arcsin x+\arcsin y$; 6) $y=x^3-4x^2+6x+3, x=1{,}04.$

7) До кривої y=arctgx написати рівняння дотичної, перпендикулярної прямій y+2x+3=0.

5.1.13.

1) $y=\frac{3x^3-5x^2+7}{arctg3x}$; 2) $y=\sqrt[3]{\ln^2\frac{\sin x}{5-x^2}}$; 3) $y=x^2\sin 2x(x+3)^5$;

4) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t); \end{cases}$ 5) $3^{x+y}=3^x-3^y$; 6) $y=\sqrt[3]{1+x}, \quad x=6{,}93.$

7) До кривої y=arccos3x написати рівняння нормалі, перпендикулярної прямій y+3x+3=0.

5.1.14.

1) $y=\cos 4x\cdot 2^x-5tg4x$; 2) $y=3^{\arccos^2(tg4x)}$; 3) $y=(tg4x)^{\ln x}$;

4) $\begin{cases} x=5^t\left(t^2+1\right), \\ y=5^t(1-t); \end{cases}$ 5) $y\ln(x+y)=\ln a$; 6) $y=e^{2-x-x^2}, \quad x=-1{,}94.$

7) Написати рівняння дотичної до кривої $y=\frac{x}{1+x^2}$ у точці з абсцисою x_0=2.

1) $y = e^{3x}\ln x - 3\arccos 3x$; 2) $y = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \ln\sqrt{x}}$; 3) $y = (\sin 2x)^{\operatorname{ctg} 2x}$;

5.1.15. 4) $\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{t}, \\ y = \dfrac{t^3}{1+t}; \end{cases}$ 5) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; 6) $y = \sqrt{9+x^2}$, $x = 4{,}01$.

7) Написати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{1+x^2}$ у точці з абсцисою $x_0=0$.

5.1.16. 1) $y = \dfrac{\cos 7x + 3}{\ln x + 4}$; 2) $y = \sin^2 \dfrac{x^5 - x}{2-x}$; 3) $y = (\sin 5x)^{\cos 5x}$;

4) $\begin{cases} x = 3^t \cos t, \\ y = 3^t \sin t; \end{cases}$ 5) $\operatorname{tg} y = a \operatorname{tg} x$; 6) $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$, $x = 0{,}01$.

7) До кривої $y=x\sin 2x$ написати рівняння дотичної , паралельної прямій $y+\pi x+9=0$.

5.1.17 1) $y = 4x^{-3/2} + x\sqrt[4]{x} - 1$; 2) $y = \sin\sqrt[3]{1+x^3}$; 3) $y = \left(x^3+5\right)^{\operatorname{ctg} 5x}$;

4) $\begin{cases} x = t^3 \ln t, \\ y = (1-t)\sqrt{t}; \end{cases}$ 5) $y = \operatorname{tg}^2(y-x)$; 6) $y = \operatorname{arctg} x^2$, $x = 0{,}97$.

7) До кривої $y = \dfrac{x^3+1}{x^2+4}$ написати рівняння дотичної і нормалі у точці з абсцисою $x_0=-1$.

5.1.18. 1) $y = \cos 2x \cdot 2^x - 5\operatorname{tg} 3x$; 2) $y = \dfrac{\ln x}{\cos^3 3x}$; 3) $y = (\cos 3x)^{\sin 5x}$;

4) $\begin{cases} x = t^3 \cos t, \\ y = \left(t^2 - 1\right)\sin t; \end{cases}$ 5) $e^{xy} = \arcsin x$; 6) $y = \sqrt[3]{2+x^2}$, $x = 4{,}97$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = e^{\sqrt{x}-1}$ у точці з ординатою $y_0=e$.

5.1.19 1) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot \operatorname{tg} 3x}{1+\cos 4x}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}}$; 3) $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{x/3}$;

4) $\begin{cases} x = \dfrac{t^3-3}{2t}, \\ y = \dfrac{t^2+1}{\ln t}; \end{cases}$ 5) $x^3 + ax^2y + y^3 = a$; 6) $y = \dfrac{x^3-2}{x^2+1}$, $x = 1{,}07$.

7) До кривої $y=\cos x$ написати рівняння дотичної, паралельної до прямої $y+x+3=0$.

1) $y=\frac{x+\arcsin 2x}{3x+\mathrm{arctg}3x}$; 2) $y=\arcsin\left(\cos x^3\right)$; 3) $y=\left(\arcsin 3x\right)^x$;

5.1.20. 4) $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t; \end{cases}$ 5) $\cos(xy)=e^{x+y}$; 6) $y=\sqrt[4]{2x-\sin\frac{\pi x}{2}}$, $x=1{,}03$.

7) До лінії $y=x^3-3x^2-5$ скласти рівняння дотичної, перпендикулярної прямій $2x-6y+1=0$.

1) $y=\sqrt[3]{x}\left(x^2-3\sqrt{x}+6\right)$; 2) $y=\arccos\left(\sin x^2\right)$; 3) $y=\left(\mathrm{arctg}3x\right)^{x+3}$;

5.1.21. 4) $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t; \end{cases}$ 5) $2y\ln y=e^x$; 6) $y=\left(x^2-1\right)^3\left(x+2\right)$, $x=2{,}03$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої y=xln(1+x2) у точці з абсцисою $x_0=1$.

1)$y=((x^2+\sqrt{x}-1)tg5x)/x^3$;2)$y=\sqrt[4]{\ln tg\frac{x}{3}}$;3)$y=\left(arctg5x\right)^{7+x}$;

5.1.22. 4)$\begin{cases} x=t/(1-t^2), \\ y=t^2/(1-t^2); \end{cases}$ 5)$2^{x+y}=\ln(x+y)$;6)$y=\frac{x^2+1}{1-x}$,$x=-0{,}93$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої y=sinx+cosx у точці з абсцисою $x_0=\pi/4$.

1)$y=\frac{e^{2x}arctg3x}{cos4x}$; 2)$y=ln^3 x+ln(ctg3x)$; 3)$y=(sin3x)^{\frac{5}{x}}$;

5.1.23. 4)$\begin{cases} x=\sqrt{1+t^3}, \\ y=t\sqrt{1+t}; \end{cases}$ 5)$arctg\frac{x}{y}=ln\,y$; 6)$y=arcsin2x$,$x=0{,}249$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=4^{x-x^2}$ у точці з абсцисою $x_0=1$.

1) $y=\sqrt[4]{x^3}+3^{-2x}$; 2) $y=\sqrt[3]{\ln\sin\frac{x}{2}}$; 3) $y=\left(\arccos 5x\right)^{x+7}$;

5.1.24. 4) $\begin{cases} x=\frac{t-2}{t}, \\ y=\frac{1-t}{\sqrt{t}}; \end{cases}$ 5) $y^3-3y+2a\ln x=0$; 6) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x=1{,}02$.

7) До кривої $y=1-\frac{1}{x^2}$ написати рівняння дотичної, паралельної до прямої $2y+32x+7=0$.

5.1.25. 1) $y=\dfrac{xe^{2x}}{\sin 2x}$; 2) $y=4^{\frac{x}{\cos 2x}}$; 3) $y=\dfrac{(x-1)^2\sqrt[3]{(x+1)^5}(x-3)^3}{(x^2+1)\sqrt[3]{(1-x)^5}}$;

4) $\begin{cases} x=t^5, \\ y=1-\cos t; \end{cases}$ 5) $\operatorname{arctg}\sqrt{x/y}+\sin y=\ln a$;6) $y=\sqrt{5-x^2}$, $x=0{,}98$.

7)Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої y=x-arctgx у точці з абсцисою x_0=1.

5.1.26. 1) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot 2^x}{\sin 3x}$; 2) $y=5^{\operatorname{ctg}^3\left(\ln\sqrt{x}\right)}$; 3) $y=(\operatorname{ctg}5x)^{\frac{7}{x}}$;

4) $\begin{cases} x=\sin t+\ln t, \\ y=\cos t+\ln t; \end{cases}$ 5) $\sin\sqrt{x+y}=\ln \operatorname{tg}y$; 6) $y=e^{2x-x^2}$, $x=2{,}014$.

7) До кривої $y=x-\sqrt{x}$ написати рівняння нормалі, перпендикулярної до прямої 4y-3x+5=0.

5.1.27. 1) $y=\dfrac{x\cdot\operatorname{arctg}4x}{\ln x}$; 2) $y=\ln^2 x+\ln(\ln x)$; 3) $y=(\cos 2x)^{\frac{3}{x}}$;

4) $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{t}; \end{cases}$ 5) $\arcsin xy=2^x$; 6) $y=(3x-1)^2(x+1)$, $x=1{,}01$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{x^3-2}{x^2-4}$ у точці з абсцисою x_0=3.

5.1.28. 1) $y=\dfrac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{\sqrt[4]{x}+x^2}$; 2) $y=3^{\operatorname{tg}^2\left(\ln\sqrt{x}\right)}$; 3) $y=(\operatorname{tg}4x)^{\frac{6}{x}}$;

4) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t; \end{cases}$ 5) $x\ln(x+y)=a$; 6) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$, $x=2{,}031$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ у точці з абсцисою x_0=1.

5.1.29. 1) $y=\dfrac{\sqrt{x}\cdot\cos 5x}{e^{2x}}$; 2) $y=5^{\frac{\sin 3x}{x}}$; 3) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2(x^3+1)\sin 2x}{x^2-2}}$;

4) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=1+t^3; \end{cases}$ 5) $\arccos\dfrac{x}{y}=2^a$; 6) $y=x^4-2x^2+5$, $x=2{,}03$.

7) Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=xe^{-x^2}$ у точці з абсцисою x_0=1.

5.1.30. $1)\ y=\frac{1-x^2}{1+x^2}\arcsin 2x;\quad 2)\ y=\cos^3(\sin 2x);\quad 3)\ y=\left(\cos\frac{5}{x}\right)^{x^2};$

$4)\ \begin{cases} x=e^t\left(t^3+1\right); \\ y=e^t\left(1-t^3\right); \end{cases}\quad 5)\ \ln\operatorname{tg}\frac{y}{x}=a;\quad 6)\ y=\sqrt{1+x+\sin x};\ x=0{,}02.$

7)Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+\sqrt[3]{x}$ у точці з абсцисою x_0=-1.

РОЗДІЛ 6

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

6.1. Первісна, властивості невизначеного інтеграла

Функція *F(x)* є *первісна* для функції *f(x)* на інтервалі *(a, b)*, якщо *F(x)* диференційовна $\forall x \in (a,\ b)$ й $F'(x) = f(x)$.

1°. Якщо *F(x)* є первісною на інтервалі *(a,b)*, то *F(x)+C*, де *C* – довільна постійна, також є первісною.

2°. Якщо $F_1(x)$ й $F_2(x)$ – будь-які дві первісні, то $F_1(x) - F_2(x) = C$, звідки $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Сукупність первісних *F(x)+C* називається *невизначеним інтегралом* і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Властивості невизначеного інтеграла

1°. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2°. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3°. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4°. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$.

5°. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C.$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C \quad (x \neq 0).$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C \quad (0 < a \neq 1).$
5. $\int e^x dx = e^x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$
14. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$
15. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$
16. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + c = -\dfrac{1}{a} arcctg \dfrac{x}{a} + c.$
17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + c = -\arccos\dfrac{x}{a} + c$.
18. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C.$
19. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \text{arctg} x + C. \\ -\text{arcctg} x + C. \end{cases}$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c.$

20. $\int shx\, dx = chx + C.$

21. $\int \text{ch}\, xdx = \text{sh}\, x + C$.

22. $\int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} = -\text{cth}\, x + C.$

23. $\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th}\, x + C$.

При інтегруванні функцій можливість безпосередньо використати основні формули буває вкрай рідкою. Як правило, підінтегральну функцію доводиться так чи інакше перетворювати для того, щоб інтеграл звести до табличного. Нижче наведені приклади таких перетворень.

Приклади.

1. $\int \frac{(1+x)^2}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x^{3/2}} dx = \int x^{-3/2} dx + 2\int x^{-1/2} dx + \int x^{1/2} dx =$

$= -2x^{-1/2} + 4x^{1/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} + C.$

2. $\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C.$

3.$\int \frac{dx}{(x^2-1)(1+x^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{2}{(x^2-1)(1+x^2)} dx = \left\| x^2+1-(x^2-1) \equiv 2 \right\| =$

$= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-(x^2-1)}{(x^2-1)(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| - \frac{1}{2} arctgx + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$

5.$\int \frac{dx}{1-\cos 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2} ctgx + C$

Зауваження. При інтегруванні однієї й тієї ж функції результати можуть бути по своєму зовнішньому вигляду різними. У дійсності ж вони або тотожні, або відрізняються між собою тільки на постійну величину.

Теорема (*про інваріантость формул інтегрування). Вид формули інтегрування залишається незмінним незалежно від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною чи деякою диференційовною функцією; тобто, якщо* $\int f(x)dx = F(x) + C$ *, то* $\int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$.

Наведена теорема дозволяє багато інтегралів приводити до табличних.

Приклади.

1. $\int xe^{x^2} dx = \left\| xdx = \frac{1}{2} d(x^2) \right\| = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$.

2. $\int sin^5 x\,cos\,xdx = \|cos\,xdx = d(sin\,x)\| = \int sin^5 xd(sin\,x) = \frac{sin^6 x}{6} + C.$

3. $\int \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx = \left\|\frac{dx}{1+x^2} = d(arctgx)\right\| = \int (arctgx)^2 d(arctgx) = \frac{(arctgx)^3}{3} + C.$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{2^2-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} arcsin\frac{x^2}{2} + C.$

5. $\int \frac{dx}{x\,ln\,x} = \left\|\frac{dx}{x} = d(ln\,x)\right\| = \int \frac{d(ln\,x)}{ln\,x} = ln|ln\,x| + C.$

6. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}} = \|e^x dx = d(e^x)\| = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{2^2-(e^x)^2}} = arcsin\frac{e^x}{2} + C.$

7. $\int \frac{sin\,x\,cos\,xdx}{\sqrt{a^2\,sin^2\,x + b^2\,cos^2\,x}} = \left\|2(a^2-b^2)sin\,x\,cos\,xdx = d(a^2\,sin^2\,x + b^2\,cos^2\,x)\right\| =$

$= \frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{d(a^2\,sin^2\,x+b^2\,cos^2\,x)}{\sqrt{a^2\,sin^2\,x+b^2\,cos^2\,x}} = \frac{\sqrt{a^2\,sin^2\,x+b^2\,cos^2\,x}}{(a^2-b^2)} + C,\ a \neq b.$

8. $\int \frac{\cos 5xdx}{\sqrt{3-\sin 5x}} = \left\|\cos 5xdx = \frac{1}{5}d(\sin 5x)\right\| = -\frac{1}{5}\int (3-\sin 5x)^{-\frac{1}{2}} d(3-\sin 5x)$

$= -\frac{2}{5}\sqrt{3-\sin 5x} + c.$

9. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1+x)}}{1+x}dx = \int \ln^{\frac{2}{3}}(1+x)d\ln(1+x) = \frac{3}{5}\ln^{\frac{5}{3}}(1+x) + C$.

10. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

Якщо позбавитися від ірраціональності в знаменнику, одержимо:

$J = \frac{1}{2}\int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\int (x+1)^{1/2} d(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1)^{1/2} d(x-1) =$

$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}\right) + C$.

11. $I = \int x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx = \left\|xdx = \frac{1}{2}d(x^2)\right\| = \frac{1}{2}\int x^2\sqrt[3]{1+x^2}d(x^2) =$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+1-1)\sqrt[3]{1+x^2}d(x^2+1) = \frac{1}{2}\int (x^2+1)\sqrt[3]{1+x^2}d(x^2+1) - \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2}d(x^2+1) =$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{4/3} d(x^2+1) - \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{1/3} d(x^2+1) = \frac{3}{14}(x^2+1)^{7/3} - \frac{3}{8}(x^2+1)^{4/3} + C$.

12. $I=\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx\left\|\begin{array}{l}\text{В чисельнику запишемо похідну знаменника}\\ \text{і виконаємо перетворення таким чином,}\\ \text{щоб одержаний вираз в чисельнику}\\ \text{був рівним початковому}\end{array}\right\|=$

$$\int\frac{\frac{3}{8}(8x-4)+\frac{3}{2}-1}{4x^2-4x+17}dx=\frac{3}{8}\int\frac{d(4x^2-4x+17)}{4x^2-4x+17}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{17}{4}}.$$

Виділимо повний квадрат:

$$x^2-x+\frac{17}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4;$$

$$I=\frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right)+\frac{1}{8}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2^2}=\frac{3}{8}\ln(4x^2-4x+17)+\frac{1}{16}arctg\frac{2x-1}{4}+c.$$

13.

$$I=\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+6x+2}}dx=\int\frac{(2x+6)-1}{\sqrt{x^2+6x+2}}dx=\int(x^2+6x+2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+6x+2)-\int\frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2-7}}$$

$$=2\sqrt{x^2+6x+2}-\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+2}\right|+c\ .$$

6.2. Методи інтегрування

6.2.1. Метод заміни змінної

Одним з основних методів обчислення інтегралів є метод заміни змінної, суть якого полягає в тому, що якщо $x=\varphi(t)$ – неперервно диференційовна монотонна функція, то

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Нижче цей метод проілюстрований на ряді прикладів.

Приклади.

1. $\int\frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}}\left\|\begin{array}{l}\sqrt{1+x^2}=t,\\ 1+x^2=t^2,\\ 2xdx=2tdt,\\ xdx=tdt\end{array}\right\|=\int\frac{tdt}{1+t}=\int\frac{(t+1)-1}{1+t}dt=\int dt-\int\frac{dt}{1+t}\|dt=d(t+1)\|$

$$t-\ln(1+t)+c=\sqrt{1+x^2}-\ln(1+\sqrt{1+x^2})+c.$$

2. $\int\frac{e^{4x}}{e^x-1}dx\left\|\begin{array}{l}e^x=t,\\ e^xdx=dt\end{array}\right\|=\int\frac{t^3}{t-1}dt=\int\frac{(t^3-1)+1}{t-1}dt=\int\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}dt+\int\frac{dt}{t-1}=$

$$\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|+c=\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}+e^x+\ln\left|e^x-1\right|+c.$$

3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx \left\| \begin{matrix} \sqrt{2x-1}=t,\ 2x-1=t^2, \\ 2dx=2tdt,\ dx=tdt, \\ x=\frac{1}{2}\left(t^2+1\right) \end{matrix} \right\| = \int \frac{\frac{1}{2}\left(t^2+1\right)-1}{t}tdt =$

$$\frac{1}{2}\int t^2dt-\frac{1}{2}\int dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+c=\frac{1}{2}\left(\frac{(2x-1)^{3/2}}{3}-\sqrt{2x-1}\right)+c=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}\left(\frac{2x-1}{3}-1\right)+c=\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}(x-2)+c.$$

4. $I=\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}$.

1-й спосіб (заміна змінної).

$$I=\left\| \begin{matrix} x=tgt & dx=\frac{dt}{cos^2 t} \\ \left(x^2+1\right)^{3/2} & =\frac{1}{cos^3 t} \end{matrix} \right\|;\ I=\int cos\,tdt=sin\,t+C== \left\| \begin{matrix} 1+ctg^2t=\frac{1}{sin^2 t} \\ sin\,t=\sqrt{\frac{tg^2t}{1+tg^2t}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{matrix} \right\|$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C\ .$$

2-й спосіб (безпосереднє обчислення).

$$I=\int \frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=-\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-3/2}d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}(-2)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Інтеграли виду: $\int R\left(x^{\frac{m}{n}},x^{\frac{l}{s}},...,x^{\frac{p}{r}}\right)dx,$ де R – раціональна функція своїх аргументів, обчислюються заміною $x=t^k$ (k – загальний знаменник дробів), що дозволяє позбутися від ірраціональностей.

5. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$.

У даному прикладі $k=2$, тому слід зробити заміну $x=t^2$. Тоді

$$I=\int \frac{2tdt}{t\left(t^2+1\right)}=2\int \frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\ \sqrt{x}+C\ .$$

Цей інтеграл можна обчислити й безпосередньо.
Другий спосіб.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}=\left\|\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d\left(\sqrt{x}\right)\right\|=2\int\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}=2arctg\sqrt{x}+C.$$

6. $$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}\quad\left|\begin{array}{l}x=t^4\\ \sqrt[4]{x}=t\\ dx=4t^3dt\end{array}\right|=\int\frac{4t^3dt}{t+t^2}=4\int\frac{t^2dt}{t+1}=4\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t+1}dt=$$

$$=4\left(\int(t-1)\,dt+\int\frac{dt}{t+1}\right)=4\left(\frac{(t-1)^2}{2}+\ln(t+1)\right)+C=4\left(\frac{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2}{2}+\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\right)+\mathrm{C}$$

При інтегруванні виразів виду: $R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)$, $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$, $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$ використовують заміни:

$$a)\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx\quad\left|x=a\cdot tgt;\quad dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt\right|$$

$$b)\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx\quad\left|\begin{array}{ll}x=a\sin t; & dx=a\cos tdt\\ x=a\cos t; & dx=-a\sin tdt\end{array}\right|$$

$$c)\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dt\quad\left|x=\frac{a}{\sin t};\quad dx=-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt\right|.$$

7. $$\int x^2\sqrt{1-x^2}dx=\int sin^2\,t\sqrt{1-sin^2\,t}\,cos\,tdt=\int sin^2\,t\,cos^2\,tdt=\frac{1}{4}\int sin^2\,2tdt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C=\frac{1}{8}\left(\arcsin x-\frac{\sin(4\arcsin x)}{4}\right)+C.$$

8. $$I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx\left\|\begin{array}{l}x=tgt\\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\end{array}\right\|=\int\frac{\sqrt{1+tg^2t}}{tg^4t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{\cos^4 tdt}{\cos t\cdot\sin^4 t\cdot\cos^2 t}=$$

$$\int\frac{\cos t}{\sin^4 t}dt=\int\sin^{-4}t\quad d\sin t=-\frac{1}{3\sin^3 t}+c.$$

Зробимо зворотну заміну, тобто виразимо *sint* через

x: $\sin t=\dfrac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}};\quad I=-\dfrac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+c$.

9. $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}\left\|x=\frac{3}{\sin t},\,dx=-\frac{3\cos tdt}{\sin^2 t},\,\sin t=\frac{3}{x}\right\|=-\int\frac{3\cos t\cdot\sin^2 tdt}{\sin^2 t\cdot 9\cdot\sqrt{\left(\dfrac{3}{\sin t}\right)^2-9}}=$$

$$-\frac{1}{9}\int\sin tdt=\frac{1}{9}\cos t+c=\frac{1}{9}\sqrt{1-\sin^2 t}+c=\frac{1}{9}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}+c=\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+c.$$

10. $$J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

1-й спосіб (заміна змінної):

$$J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}\left\|\begin{matrix}x=\sin t, & dx=\cos t dt\\ \sqrt{1-x^2}=\cos t & \end{matrix}\right\|=\int\sin^5 t dt=-\int\left(1-\cos^2 t\right)^2 d\cos t=$$

$$=-\int\left(1-2\cos^2 t+\cos^4 t\right)d\cos t=-\cos t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t=$$

$$=\left\|\begin{matrix}x=\sin t\\ \cos t=\sqrt{1-x^2}\end{matrix}\right\|=-\sqrt{1-x^2}\left(1-\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)+\frac{1}{5}\left(1-x^2\right)^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\left(8+4x^2+3x^4\right)+C.$$

2-й спосіб:

Якщо під знаком інтеграла міститься змінна x у непарному степені, то можливо використання заміни $\sqrt{1-x^2}=t$.

$$J=\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left\|\begin{matrix}t^2=1-x^2, \quad 2tdt=-2xdx\\ x^4=1-2t^2+t^4,\ x^5dx=\left(1-2t^2+t^4\right)tdt\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\int\frac{t\left(1-2t^2+t^4\right)}{t}dt=-\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=-\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right)+C=$$

$$-\frac{1}{15}\left(8+4x^2+3x^4\right)\sqrt{1-x^2}+C.$$

6.2.2. Метод інтегрування частинами

Нехай функції $u=u(x),\ v=v(x)$ мають неперервні похідні, тоді справедлива формула *інтегрування частинами*

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du. \qquad (6.2.1.)$$

Зауваження. Назва інтегрування частинами пояснюється тим, що формула не дає остаточного результату, а тільки зводить задачу знаходження інтеграла $\int udv$ до задачі знаходження іншого інтеграла $\int vdu$, що при *вдалому* виборі *u* й *v* виявляється більше простим. Загальних правил вибору функцій *u* й *v* немає, однак можна дати деякі рекомендації для окремих випадків.

Як правило, метод інтегрування частинами застосовується у випадку, коли підінтегральна функція містить добуток раціональних і трансцендентних функцій і при цьому інші методи незастосовні.

Наприклад, $\int P_n(x)\cos\alpha x dx,\quad \int P_n(x)\sin\alpha x dx,\quad \int P_n(x)e^{\alpha x}dx,\quad \int x^k\ln x dx,$ $\int x^k \operatorname{arctg} x\, dx$ і т.д.

Якщо підінтегральна функція має вигляд $P_n(x)\cos\alpha x,\ P_n(x)\sin\alpha x,$ $P_n(x)e^{\alpha x}$, то за "u" приймають многочлен $P_n(x)$.

Якщо підінтегральна функція є добуток логарифмічної або оберненої тригонометричної функції й многочлена, то за "u" приймають ці функції.

Приклади.

1. $\int x\sin xdx\left|\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ dv=\sin xdx & \\ v=-\cos x & \end{matrix}\right|=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C.$

2. $\int xarctgxdx=\left\|\begin{matrix}u=arctgx;\ du=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ dv=xdx;\ \ v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right\|=arctgx\cdot\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\int x^2\dfrac{dx}{1+x^2}=$

$=\dfrac{x^2}{2}arctgx-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=\dfrac{x^2}{2}arctgx-\dfrac{1}{2}\int dx+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{dx}{x^2+1}=$

$=\dfrac{x^2}{2}arctgx-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}arctgx+C$

У деяких випадках методом інтегрування частинами зводиться до розв'язування алгебраїчного рівняння щодо вихідного інтеграла.

3. $I=\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx\left\|\begin{matrix}e^{\alpha x}=u, \sin\beta xdx=dv,\\ \alpha e^{\alpha x}dx=du, -\dfrac{1}{\beta}\cos\beta x=v\end{matrix}\right\|=-\dfrac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\dfrac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx=$

$\left\|\begin{matrix}e^{\alpha x}=u, \cos\beta xdx=dv,\\ \alpha e^{\alpha x}dx=du, \dfrac{1}{\beta}\sin\beta x=v\end{matrix}\right\|=-\dfrac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\dfrac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx\right)=$

$-\dfrac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\dfrac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx\Rightarrow$

$I=-\dfrac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\dfrac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}I$ – рівняння щодо вихідного інтеграла I.

Звідси $I=\dfrac{\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}+c$.

4. $I=\int\sqrt{a^2+x^2}dx$.

$I=\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\left\|\begin{matrix}u=\sqrt{a^2+x^2}, & du=\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}\\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right\|=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=$

$=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\dfrac{\left(x^2+a^2\right)-a^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=x\sqrt{a^2+x^2}-\underbrace{\int\sqrt{a^2+x^2}dx}_{I}+a^2\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=$

$=x\sqrt{a^2+x^2}-I+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+2C$

Таким чином, отримане рівняння щодо вихідного інтеграла, тобто відносно I. Розв'язуючи це рівняння, одержимо

$2I=x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+2C$

$I=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)+C$

5. $\int \sin(\ln x)dx \left\| \begin{matrix} u=\sin(\ln x);\ du=\cos(\ln x)\dfrac{dx}{x}; \\ dv=dx; \qquad v=x. \end{matrix} \right\| = x\times\sin(\ln x) - \int x\times\cos(\ln x)\dfrac{dx}{x} =$

$= x\cdot\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx \left\| \begin{matrix} u=\cos\ln x;\ du=-\sin(\ln x)\dfrac{dx}{x}; \\ dv=dx; \quad v=x \end{matrix} \right\| x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$

Отримано рівняння щодо шуканого інтеграла, звідси:

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C .$$

Часто метод інтегрування частинами застосовується з методом заміни змінних.

6. $I = \int \sin^2\left(\sqrt{x}\right)dx = \left\| \begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{matrix} \right\| = 2\int t\sin^2 tdt = 2\int t\dfrac{1-\cos 2t}{2}dt =$

$\dfrac{t^2}{2} - \int\ t\cos 2tdt \left\| \begin{matrix} u=t, \quad du=dt \\ dv=\cos 2tdt, \quad v=\dfrac{\sin 2t}{2} \end{matrix} \right\| = \dfrac{t^2}{2} - t\dfrac{\sin 2t}{2} + \dfrac{1}{2}\int\ \sin 2tdt = \dfrac{t^2}{2} - t\dfrac{\sin 2t}{2} -$

$-\dfrac{1}{4}\cos 2t + C = \dfrac{\sqrt{x}}{2}\left(\sqrt{x} - \sin 2\sqrt{x}\right) - \dfrac{1}{4}\cos 2\sqrt{x} + C$

6.2.3. Інтегрування раціональних дробів

Первісна функція існує для всякої неперервної функції (за теоремою про існування первісної для неперервної функції). Однак, задача знаходження аналітичного виразу первісної функції в скінченному виді, тобто у вигляді скінченної комбінації елементарних функцій, має точний розв'язок тільки в окремих випадках. У скінченному виді інтегрується досить вузький клас функцій.

Раціональні дроби належать до класу функцій, інтеграли від яких виражаються через елементарні функції. Під раціональним дробом розуміється відношення

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m}.$$

Будь-який раціональний дріб може бути представлений як сума многочлена й елементарних дробів. Під елементарними дробами розуміють дроби наступних чотирьох видів:

а) $\dfrac{A}{x-a}$; б) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$; в) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, де $(p^2-4q)<0;$ г) $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}$.

Знаходження інтегралів від раціональних дробів рекомендується виконувати за наступною схемою:

1. Якщо $n \geq m$ (дріб *неправильний*), то треба *виділити цілу частину* представивши підінтегральну функцію у вигляді суми цілої частини (многочлена) і правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу $Q_m(x)$ розкласти на множники, що відповідають дійсним і парам комплексно спряжених коренів, тобто множники виду $(x-a)^k, (x^2+px+q)^r$, де $p^2-4q<0$.

3. Розкласти правильний раціональний дріб на найпростіші, використовуючи теорему:

Теорема. *Якщо* $Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}...(x^2+px+q)^{\mu}...(x^2+lx+s)^{\nu}$, *то правильний нескоротний раціональний дріб* $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *може бути представлений у вигляді*

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+...+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+...+$$

$$+\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+...+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{(x^2+px+q)}+...+$$

$$+\frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}}+\frac{P_1x+N_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}}+...+\frac{P_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{(x^2+lx+s)}.$$

Коефіцієнти $A, A_1, ..., B, B_1, ...$ можна визначити з наступних міркувань. Написана рівність є тотожність, тому, привівши дроби до загального знаменника, одержимо тотожні многочлени в чисельниках праворуч і ліворуч. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A, A_1, ..., B, B_1, ...$

Поряд із цим, для визначення коефіцієнтів можна використати наступний прийом: оскільки многочлени, отримані в правій і лівій частинах рівності після приведення до загального знаменника, повинні бути тотожно рівні, то їхні значення рівні при будь-яких значеннях x. Надаючи x конкретні значення, одержимо рівняння для визначення коефіцієнтів. Як такі значення зручно вибирати дійсні корені знаменника. На практиці для знаходження коефіцієнтів можна використати обидва підходи одночасно.

4. Інтеграли від найпростіших раціональних дробів знаходяться за формулами

а) $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\,ln|x-a|+C$

б) $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$, $n\neq 1$

в) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{A}{2}p+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}ln\left(x^2+px+q\right)+$

$$+\left(B-\frac{A}{2}p\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{A}{2}ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{B-\frac{A}{2}p}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C,$$

де $p^2-4q<0.$

г) Обчислення інтегралів від найпростіших дробів четвертого типу досить складно; при необхідності можна скористатися рекурентним співвідношенням, що дозволяє виразити $I_n = \int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ через I_{n-1}.

Приклади інтегрування раціональних дробів**.**

1. $I = \int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx$.

Дріб $\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}$ – правильний, тому що степінь чисельника менше степеня знаменника. Знаменник дробу має дійсні кратні корені. Розкладемо підінтегральну функцію на найпростіші дроби.

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Приведемо до загального знаменника дроби й прирівняємо чисельники:

$x^2\text{-}3x+2=A(x+1)^2+Bx+Cx(x+1)$

Для знаходження коефіцієнта A покладемо $x=0$, тоді $A=2$. Покладаючи $x=-1$, знаходимо коефіцієнт $B=-6$.

Для відшукання коефіцієнта С прирівнюємо коефіцієнти при x^2:

$1=A+C$, тоді $C=-1$.

Отже, $I = 2\int \frac{dx}{x}-6\int \frac{dx}{(x+1)^2}-\int \frac{dx}{x+1} = 2\ln|x|+\frac{6}{x+1}-\ln|x+1|+C$.

2. $\int \frac{dx}{x^3-1} = \int \frac{dx}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$;

розкладемо дріб на найпростіші $\frac{1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$;

тоді $\qquad 1 = A\left(x^2+x+1\right)+\left(Bx+\tilde{N}\right)(x-1)$

Нехай $x=1$, тоді $1=3A$, $A=1/3$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x; (наприклад, перш ому і другому) одержимо систему рівнянь для знаходження інших коефіцієнтів:

$x^1 \quad A+C\text{-}B=0; \; C=-2/3$

$x^2 \quad A+B=0\ ;\ \ B=-1/3.$

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} + 2}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}ln|x-1| - \frac{1}{6}ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}ln|x-1| - \frac{1}{6}ln(x^2+x+1) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Зауваження. При обчисленні інтегралів від раціональних функцій іноді можна обійтися без розкладання їх на найпростіші, застосовуючи інші прийоми, наприклад

$$1.\quad I = \int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}dt.$$

Цей інтеграл можна знайти методом інтегрування частинами. Дійсно, покладаючи:

$$u = t,\ dv = \frac{tdt}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{d(t^2-1)}{(t^2-1)^2};\ \ du = dt,\ v = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-1)}{(t^2-1)^2} = -\frac{1}{2(t^2-1)},$$

одержимо

$$I = -\frac{t}{2(t^2-1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{t}{2(t^2-1)} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - C.$$

$$4.\ \int \frac{dt}{(t^2-1)(t^2+4)} = \left\| t^2+4-(t^2-1) \equiv 5 \right\| = \frac{1}{5}\int \frac{t^2+4-(t^2-1)}{(t^2-1)(t^2+4)}dt = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2-1} -$$

$$-\frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{5}ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{10}arctg\frac{t}{2} + C.$$

$$5.\ I = \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$$

Дріб $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$ – неправильний, тому що степінь чисельника більше степеня знаменника. Виділимо цілу частину, розділивши чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{l|l} -x^5+x^4-8 & \underline{x^3-4x} \\ \underline{x^5-4x^3} & x^2+x+4 \\ \quad -x^4+4x^3-8 & \\ \quad \underline{x^4-4x^2} & \\ \qquad -4x^3+4x^2-8 & \\ \qquad \underline{4x^3-16x} & \\ \qquad\quad 4x^2+16x-8 & \end{array}$$

Тоді вихідний інтеграл зводиться до суми наступних двох інтегралів

$$I = \int (x^2 + x + 4)dx + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)}dx$$

Розкладемо підінтегральну функцію другого інтеграла на найпростіші дроби:

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

Приведемо до загального знаменника, прирівняємо чисельники

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x^2 - 4) + Bx(x+2) + Cx(x-2)$$

При $x = 0 : -8 = -4A \Rightarrow A = 2.$

При $x = 2 : 40 = 8B \Rightarrow B = 5.$

При $x = -2 : -24 = 8C \Rightarrow C = -3.$

Виходить,

$$I = \int (x^2 + x + 4)dx + 2\int \frac{dx}{x} + 5\int \frac{dx}{x-2} - 3\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + c =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3} + c.$$

6.2.4. Інтегрування тригонометричних виразів

Теорема 1. Інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ – раціональна функція відносно *sinx* й *cosx*, підстановкою, $t = tg\frac{x}{2}$ приводиться до інтеграла від раціональної функції змінної *t*.

Підстановка $t = tg\frac{x}{2}$ застосовна до будь-яких раціональних відносно *sinx* й *cosx* функцій, у зв'язку із чим вона називається *універсальною*. Однак, у силу своєї універсальності, дана підстановка звичайно приводить до громіздких викладень, тому вона використовується в тих випадках, коли інші підстановки застосувати не можна.

При обчисленні інтегралів виду $\int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}$ застосовується *універсальна тригонометрична підстановка* $tg\frac{x}{2} = t$, або $x = 2arctgt$.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Приклад 1. $I = \int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x}$

Враховуючи наведені вище формули, одержимо

$$I = \int \frac{2dt}{t^2 + 2t + 17} = 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + 4^2} == \frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2} + 1}{4} + C$$

Теорема 2. Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тобто підінтегральна функція непарна відносно *cosx*, то підстановкою *t= sinx* інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ приводиться до інтеграла від раціональної функції *t*.

Приклад 2.

$$\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx \left| t = \sin x \right| = \int \frac{(1-t^2)dt}{2+t} = \int (-t + 2 - \frac{3}{2+t})dt =$$

$$= -\frac{t^2}{2} + 2t - 3\ln(2+t) + C = -\frac{\sin^2 x}{2} + 2\sin x - 3\ln(2+\sin x) + C\,.$$

Приклад 3.

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \begin{Vmatrix} \cos x dx = d(\sin x) \\ \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \\ 2 + \cos 2x = 3 - 2\sin^2 x \end{Vmatrix} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3 - 2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{3}} + C\,.$$

Терема 3. Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тобто підінтегральна функція непарна відносно *sinx*, то підстановкою *t=cosx* інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ приводиться до інтеграла від раціональної функції *t*.

Приклад 4. $\int \sin^5 x dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x dx = \begin{Vmatrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{Vmatrix} = -\int (1-t^2)^2 dt =$

$$= -\int (1 - 2t^2 + t^4)dt = -(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}) + C = \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x - \cos x + C$$

Приклад 5. $I = \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1+\sin^2 x}} = \begin{Vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{Vmatrix} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{2-t^2}} = \begin{Vmatrix} t = \sqrt{2}\sin u \\ dt = \sqrt{2}\cos u du \end{Vmatrix} =$

$$= -\sqrt{2}\int \frac{\cos u du}{\sqrt{2}\sin u \sqrt{2}\cos u} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| tg\frac{u}{2} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| tg\left(\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| tg\left(\arcsin\frac{\cos x}{\sqrt{2}} \right) \right| + C\,.$$

Теорема 4. Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тобто підінтегральна функція парна відносно *sinx* й *cosx*, то інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ підстановкою *t=tgx* приводиться до інтеграла від раціональної функції *t*.

Приклад 6.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 6\frac{\sin x}{\cos x} - 16 \right)} =$$

$$= \int \frac{d(tgx)}{tg^2 x + 6tgx - 16} = \left| t = tgx \right| == \int \frac{dt}{(t+3)^3 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left| \frac{t-2}{t+8} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left| \frac{tgx - 2}{tgx + 8} \right| + C\,.$$

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\cos^2 x tgx dx}{\cos^4 x(1+tg^4 x)} = \int \frac{tgx dx}{\cos^2 x(1+tg^4 x)} =$$

$$= \left\| \frac{tgx dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} d(tg^2 x) \right\| = \frac{1}{2} \int \frac{d(tg^2 x)}{(1+tg^4 x)} = \frac{1}{2} arctg(tg^2 x) + C .$$

Інтеграли виду $\int \sin ax \cos bx dx; \int \cos ax \cos bx dx; \int \sin ax \sin bx dx,$

де $a \neq b$, знаходяться за допомогою формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$$

Приклад. $\int \sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin\left(\frac{x}{12} - \frac{x}{3}\right)dx + \int \sin\left(\frac{x}{12}+\frac{x}{3}\right)dx\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int \sin\frac{x}{4}dx + \int \sin\frac{5x}{12}dx\right) = \frac{1}{2}\left(-4\int \sin\frac{x}{4} d\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{12}{5}\int \sin\frac{5x}{12} d\left(\frac{5x}{12}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\cos\frac{x}{4} - \frac{12}{5}\cos\frac{5x}{12}\right) + C$$

Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$**,**

де m й n – додатні парні числа, знаходяться за допомогою формул:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \; \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad (6.2.2)$$

Приклад 1. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$;

Розв'язання. 1) Застосовуючи формули (6.2.2), одержуємо

$$I = \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C .$$

Приклад 2. $\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x) dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C .$$

Інтеграли виду $\int tg^n x dx, \int ctg^n x dx, n \in N (n \geq 3)$

знаходяться за допомогою формул $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, при цьому відокремлюємо множники $tg^2 x$ або $ctg^2 x$:

$$tg^n x = tg^{n-2} x \cdot tg^2 x .$$

Приклад. $\int tg^5 x dx = \int tg^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int tg^3 x d(tgx) - \int tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx =$
$= \frac{tg^4 x}{4} - \int tgx d(tgx) + \int tgx dx = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$.

Контрольні завдання до розділу 6

Завдання 1. Знайти невизначені інтеграли.

6.1.1.

$1.\int \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}dx;\ 2.\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx;\ 3.\int (4-3x)e^{-3x}dx;\ 4.\int \frac{\arcsin\frac{1}{x}}{x^2}dx;$

$5.\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx;\ 6.\int \sqrt{256-x^2}dx;\ 7.\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)\cdot(x+2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(x^2+1)\cdot(x-2)}dx;\ 9.\int \frac{1}{\sin x+\cos x+3}dx;\ 10.\int \frac{\sqrt{tg\,x}}{\sin x\cdot\cos x}dx.$

6.1.2.

$1.\int \frac{1+\ln x}{x}dx;\ 2.\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}dx;\ 3.\int arctg\sqrt{4x-1}dx;\ 4.\int \frac{x\cdot\cos x}{\sin^3 x}dx;$

$5.\int \frac{4x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx;\ 6.\int x^2\sqrt{1-x^2}dx;\ 7.\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x\cdot(x+2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{x\cdot(x^2+1)}dx; 9.\int \frac{1}{2\cdot\sin x+3\cdot\cos x+2}dx;\ 10.\int \frac{1}{e^x+1}dx.$

6.1.3.

$1.\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;\ 2.\int \frac{4\cdot arctg\,x-4}{1+x^2}dx;\ 3.\int x\cdot\ln(x-1)dx;\ 4.\int \sin 4x\cdot e^{\sin 2x}dx;$

$5.\int \frac{7x-1}{\sqrt{3x^2-6x+9}}dx;\ 6.\int \frac{1}{(25+x^2)\cdot\sqrt{25+x^2}}dx;\ 7.\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)\cdot(x-2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{1-x^4}dx;\ 9.\int \frac{1}{7\cdot\cos x-6\cdot\sin x+9}dx;\ 10.\int \sqrt{1+\sin x}dx.$

6.1.4.

$1.\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx;\ 2.\int \frac{x^3}{x^2+4}dx;\ 3.\int (4-16x)\cdot\sin 4x dx;\ 4.\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;$

$5.\int \frac{4x+3}{\sqrt{-x^2+2x+4}}dx;\ 6.\int \frac{1}{(9+x^2)^{3/2}}dx;\ 7.\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)\cdot(x+2)^3}dx;$

$8.\int \frac{1}{(x^2+1)\cdot(x^2+x)}dx;\ 9.\int \frac{1}{2\cdot\sin x+3\cdot\cos x+2}dx;\ 10.\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx.$

6.1.5.

$$1.\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(x+1)}dx;\quad 2.\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\cdot\sin x}dx;\quad 3.\int(3x+4)\cdot e^{3x}dx;\quad 4.\int \frac{arctg\,\ln x}{x}dx;$$

$$5.\int \frac{3x+4}{\sqrt{9x^2+6x-5}}dx;\quad 6.\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx;\quad 7.\int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)\cdot(x+2)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)\cdot(x-1)}dx;\quad 9.\int \frac{1}{3\cdot\sin x+11\cdot\cos x+12}dx;\quad 10.\int e^{2x}\sqrt{1+e^x}dx.$$

6.1.6.

$$1.\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;\quad 2.\int \frac{2\cdot\cos x+3\cdot\sin x}{(2\cdot\sin x-3\cdot\cos x)^3}dx;\quad 3.\int \ln\left(x^2+4\right)dx;$$

$$4.\int x^3\cdot e^{-x^2}dx; 5.\int \frac{1-4x}{\sqrt{x^2-x+2}}dx; 6.\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx; 7.\int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)\cdot(x-2)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{(x+1)\cdot\left(x^2+1\right)}dx; 9.\int \frac{1}{18\cdot\cos x-\sin x+17}dx;\quad 10.\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$$

6.1.7.

$$1.\int tg\,x\cdot\ln\cos x dx;\quad 2.\int \frac{8x-arctg\,2x}{1+4x^2}dx;\quad 3.\int(1-6x)\cdot e^{2x}dx;\quad 4.\int \frac{x\cdot\sin x}{\cos^3 x}dx;$$

$$5.\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2-8x+1}}dx;\quad 6.\int \frac{x^4}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx;\quad 7.\int \frac{2x^2+6x^2+7x+1}{(x-1)\cdot(x+1)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{(x+1)\left(x^2+2\right)}dx; 9.\int \frac{1}{8\cos x+\sin x+9}dx; 10.\int \sqrt{1+\cos^2 x}\,\sin 2x\cos 2x dx.$$

6.1.8.

$$1.\int \frac{tg\,(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx;\quad 2.\int \frac{\left(1/2\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx;\quad 3.\int(4x-2)\cdot\cos 2x dx;\quad 4.\int \frac{arctg\,\frac{1}{x}}{x^2}dx;$$

$$5.\int \frac{4x-1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}dx;\quad 6.\int \frac{1}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}dx;\quad 7.\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)\cdot(x+2)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{16-x^4}dx;\quad 9.\int \frac{1}{5\cdot\cos x-5\cdot\sin x+7}dx;\quad 10.\int \sqrt{e^x-1}dx.$$

6.1.9.

$$1.\int \frac{x^3+x}{\left(x^2+1\right)^2}dx;\quad 2.\int \frac{x\cdot e^{x^2}}{\cos^2\left(e^{x^2}\right)}dx;\quad 3.\int(2-4x)\cdot\sin 2x dx;\quad 4.\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;$$

$$5.\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2-4x+4}}dx;\quad 6.\int \frac{x^4}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}dx;\quad 7.\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x\cdot(x+1)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+1\right)}dx;\quad 9.\int \frac{1}{25\cdot\cos x+2\cdot\sin x+23}dx;\quad 10.\int \frac{\ln tg\,x}{\sin x\cdot\cos x}dx.$$

6.1.10.

1. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$; 2. $\int \frac{x}{x^4+1}dx$; 3. $\int (5x-2)\cdot e^{3x}dx$; 4. $\int \sin x\cdot \ln\cos x dx$;

5. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{-x^2+x+4}}dx$; 6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$; 7. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x\cdot(x-2)^3}dx$;

8. $\int \frac{1}{(x-1)\cdot\left(x^2+1\right)}dx$; 9. $\int \frac{1}{5\cdot\cos x+3\cdot\sin x+3}dx$; 10. $\int \frac{x^5}{\left(x^2-4\right)^2}dx$.

6.1.11.

1. $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}dx$; 2. $\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3. $\int arctg\sqrt{6x-1}dx$; 4. $\int x^3 \arcsin x^2 dx$;

5. $\int \frac{2x+4}{\sqrt{4x^2+4x-2}}dx$; 6. $\int \sqrt{4-x^2}dx$; 7. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)\cdot(x-2)^3}dx$;

8. $\int \frac{1}{\left(x^2+2\right)\cdot x}dx$; 9. $\int \frac{1}{2\cdot\cos x-3\cdot\sin x+1}dx$; 10. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

6.1.12.

1. $\int \frac{x\cdot\cos x+\sin x}{(x\cdot\sin x)^2}dx$; 2. $\int \frac{arctg\, x+x}{1+x^2}dx$; 3. $\int e^{-2x}(4x-3)dx$; 4. $\int \frac{arcctg\ln x}{x}dx$;

5. $\int \frac{-3x+1}{\sqrt{-x^2+3x-1}}dx$; 6. $\int \frac{1}{\left(16+x^2\right)^{3/2}}dx$; 7. $\int \frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)\cdot(x-2)^3}dx$;

8. $\int \frac{1}{(1-x)\cdot\left(x^2+2\right)\cdot x}dx$; 9. $\int \frac{1}{7\cdot\cos x-\sin x+5}dx$; 10. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx$.

6.1.13.

1. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$; 2. $\int \frac{x-(arctg\, x)^4}{1+x^2}dx$; 3. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$; 4. $\int \sin 4x\cdot e^{\cos 2x}dx$;

5. $\int \frac{-3x+6}{\sqrt{6x^2-2x-7}}dx$; 6. $\int x^2\sqrt{16-x^2}dx$; 7. $\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)\cdot(x-2)^3}dx$;

8. $\int \frac{x}{(x+1)\cdot\left(x^2+1\right)}dx$; 9. $\int \frac{1}{11\cdot\cos x+8\cdot\sin x+13}dx$; 10. $\int \frac{1-tg\, x}{1+tg\, x}dx$.

6.1.14.

1. $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$; 2. $\int \frac{\cos x-x\sin x}{(x\cdot\cos x)^3}dx$; 3. $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$; 4. $\int \sin 4x\ln\sin 2x dx$;

5. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{-x^2-3x-2}}dx$; 6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$; 7. $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)\cdot x^3}dx$;

8. $\int \frac{x}{x^2\cdot\left(x^2+2\right)}dx$; 9. $\int \frac{1}{\cos x+2\cdot\sin x+2}dx$; 10. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$.

6.1.15.

1. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}dx$; 2. $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3. $\int \ln\left(4x^2+1\right)dx$; 4. $\int \frac{arcctg\frac{1}{x}}{x^2}dx$;

$$5.\int \frac{4-x}{\sqrt{x^2+8x+3}}dx;\quad 6.\int x^2\sqrt{25-x^2}dx;\quad 7.\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)\cdot(x+1)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{x}{(x-1)\cdot\left(x^2+4\right)}dx;\quad 9.\int \frac{1}{7\cdot\sin x-19\cdot\cos x-17}dx;\quad 10.\int x\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx.$$

6.1.16.

$$1.\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx;\ 2.\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(x+1)}dx;\ 3.\int (5x+6)\cdot\cos 2x dx;$$

$$4.\int e^{2x}\arcsin e^x dx;5.\int \frac{3x-4}{\sqrt{-x^2-x+5}}dx;\quad 6.\int \sqrt{16-x^2}dx;\quad 7.\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)\cdot x^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)}dx;\quad 9.\int \frac{1}{\sin x-3\cdot\cos x-1}dx;\quad 10.\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$$

6.1.17.

$$1.\int \frac{\left(x^2+1\right)}{\left(x^3+3x+1\right)^5}dx;\ 2.\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+tg\,x}}dx;\ 3.\int (2x-5)\cos 4x dx;$$

$$4.\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;5.\int \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x-8}}dx;\ 6.\int \frac{1}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}dx;$$

$$7.\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)\cdot(x+1)^3}dx;8.\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)x}dx;9.\int \frac{1}{2+\cos x+\sin x}dx;10.\int x\sqrt{a-x}dx.$$

6.1.18.

$$1.\int \frac{arctg\,x-x}{1+x^2}dx;\quad 2.\int \frac{1+\ln x}{x}dx;\quad 3.\int (3x-2)\cdot\cos 5x dx;\quad 4.\int \cos x\cdot\ln\sin x dx;$$

$$5.\int \frac{2x+5}{\sqrt{-x^2+2x+1}}dx;\quad 6.\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx;\quad 7.\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)\cdot(x+1)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{x^4-1}dx;\quad 9.\int \frac{1}{5-3\cdot\cos x-12\cdot\sin x}dx;\quad 10.\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cdot\cos x}dx.$$

6.1.19.

$$1.\int \frac{x^3}{x^2+4}dx;\ 2.\int \frac{\sin^2 x-\sin x}{\cos^4 x}dx;\ 3.\int \left(x\cdot\sqrt{2}-3\right)\cdot\cos 2x dx;\ 4.\int \frac{\arcsin\ln x}{x}dx;$$

$$5.\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+12x+1}}dx;\quad 6.\int \frac{x^4}{\left(16-x^2\right)\cdot\sqrt{16-x^2}}dx;\quad 7.\int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)\cdot(x+1)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{\left(x^2+x\right)\cdot\left(x^2+1\right)}dx;\quad 9.\int \frac{1}{6-4\cdot\sin x-2\cdot\cos x}dx;\quad 10.\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx.$$

6.1.20.

$$1.\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\cdot\sin x}dx;\quad 2.\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx;\quad 3.\int (4x+7)\cdot\cos 3x dx;\quad 4.\int \frac{x\cdot\cos x}{\sin^2 x}dx;$$

$$5.\int \frac{2x+3}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx;\quad 6.\int x^2\sqrt{9-x^2}dx;\quad 7.\int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)\cdot(x+1)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot(x+1)}dx;\ \ 9.\int \frac{1}{2\cdot\sin x+3\cdot\cos x+2}dx;\ \ 10.\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx.$$

6.1.21.

$$1.\int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx;\ 2.\int \frac{e^{\sqrt{x}}\cos e^{\sqrt{x}}}{2\cdot\sqrt{x}}dx;\ 3.\int \frac{x}{\sin^2 x}dx;\ 4.\int \sin(x^2)x^3dx;$$

$$5.\int \frac{1-5x}{\sqrt{x^2+x+9}}dx;\ \ 6.\int \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx;\ \ 7.\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{(x-1)\cdot\left(x^2+4\right)}dx;\ \ 9.\int \frac{1}{2-2\cdot\sin x+\cos x}dx;\ \ 10.\int \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}dx.$$

6.1.22.

$$1.\int \frac{8x-\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}dx;\ \ 2.\int \frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3}dx;\ \ 3.\int (8-3x)\cdot\cos 5x\,dx;\ \ 4.\int \frac{\arccos\frac{1}{x}}{x^2}dx;$$

$$5.\int \frac{1-2x}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx;\ \ 6.\int \frac{1}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}dx;\ \ 7.\int \frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{\left(x^2+2\right)\cdot(x+1)}dx;\ \ 9.\int \frac{1}{12\cdot\cos x-3\cdot\sin x+13}dx;\ \ 10.\int \frac{1}{(2+x)\cdot\sqrt{1+x}}dx.$$

6.1.23.

$$1.\int \frac{\left(1/2\sqrt{x}\right)+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx;\ 2.\int \operatorname{tg}x\cdot\ln\cos x\,dx;\ 3.\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}\,dx;\ 4.\int e^{2x}\operatorname{arctg}e^x dx;$$

$$5.\int \frac{3x+2}{\sqrt{6x^2+12x+24}}dx;\ \ 6.\int \frac{x^4}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx;\ \ 7.\int \frac{x^3+6x^2+18x-4}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx;$$

$$8.\int \frac{1}{x^4-16}dx;\ \ 9.\int \frac{1}{3\cdot\sin x+4\cdot\cos x+3}dx;\ \ 10.\int x\cdot\sqrt{3+x}\,dx.$$

6.1.24.

$$1.\int \frac{x+x^3}{x^4+1}dx;\ \ 2.\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx;\ \ 3.\int (2-3x)\cdot\sin 2x\,dx;\ \ 4.\int \sin 4x\cdot e^{\sin 2x}dx;$$

$$5.\int \frac{3-2x}{\sqrt{-x^2+10x-6}}dx;\ \ 6.\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}dx;\ \ 7.\int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx.$$

$$8.\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot x\cdot(x+1)}dx;\ \ 9.\int \frac{1}{19-\sin x+18\cos x}dx;\ \ 10.\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}x}}{\sin x\cdot\cos x}dx.$$

6.1.25.

$$1.\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx;\ \ 2.\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;\ \ 3.\int (4x+3)\cdot\sin 5x\,dx;$$

$$4.\int \frac{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;5.\int \frac{4x+6}{\sqrt{4x^2+8x+3}}dx;6.\int \sqrt{4-x^2}\,dx;7.\int \frac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)\cdot(x-2)^3}dx;$$

$8.\int\frac{1}{(x^2+1)\cdot(x-1)}dx;$ $9.\int\frac{1}{2\cdot\sin x+3\cdot\cos x+1}dx;$ $10.\int\frac{tg\,x+1}{tg\,x-1}dx.$

6.1.26.

$1.\int\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{1/\sqrt{x}}{1+x}\right)dx;$ $2.\int\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx;$ $3.\int(7x-10)\sin 4x dx;$ $4.\int\frac{\arccos\ln x}{x}dx;$

$5.\int\frac{5-2x}{\sqrt{-x^2+6x-5}}dx;$ $6.\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx;$ $7.\int\frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx;$

$8.\int\frac{1}{x\cdot(x^2+2)}dx;$ $9.\int\frac{1}{5\cdot\cos x+3\cdot\sin x+3}dx;$ $10.\int\frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}dx.$

6.1.27.

$1.\int\frac{arctg\,x+x}{1+x^2}dx;$ $2.\int\frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}dx;$ $3.\int(\sqrt{2}-8x)\sin 3x dx;$ $4.\int e^{2x^2}x^3dx;$

$5.\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+6x+8}}dx;$ $6.\int\frac{1}{(4+x^2)\cdot\sqrt{4+x^2}}dx;$ $7.\int\frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)\cdot(x-1)^3}dx;$

$8.\int\frac{1}{x\cdot(x^2+2)(x-1)}dx;$ $9.\int\frac{1}{8\cdot\sin x+11\cdot\cos x+13}dx;$ $10.\int(x+3)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$

6.1.28.

$1.\int\frac{x-(arctgx)^4}{1+x^2}dx;$ $2.\int\frac{x\cos x+\sin x}{(x\cdot\sin x)^2}dx;$ $3.\int e^{-3x}(2-9x)dx;$ $4.\int x^3\arccos x^2dx;$

$5.\int\frac{3+x}{\sqrt{-x^2+6x-1}}dx;$ $6.\int\frac{x^4}{(4-x^2)^{3/2}}dx;$ $7.\int\frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)\cdot(x-1)^3}dx;$

$8.\int\frac{x}{(x^2+1)\cdot(x+1)}dx;$ $9.\int\frac{1}{17+18\cdot\cos x-\sin x}dx;$ $10.\int\frac{1}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}dx.$

6.1.29.

$1.\int\frac{x^3+x}{x^4+1}dx;$ $2.\int\frac{\cos^2 x+\cos x}{\sin^4 x}dx;$ $3.\int arctg\sqrt{3x-1}dx;$ $4.\int x^3\cdot\sin x^2dx;$

$5.\int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+6x+1}}dx;$ $6.\int\frac{1}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}dx;$ $7.\int\frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)\cdot(x+2)^3}dx;$

$8.\int\frac{x}{(x^2+2)\cdot x^2}dx;$ $9.\int\frac{1}{7\cdot\sin x-19\cdot\cos x-17}dx;$ $10.\int\frac{\sin^3 x}{(\cos x)^{5/2}}dx.$

6.1.30.

$1.\int\frac{(\arcsin x)^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ $2.\int\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}dx;$ $3.\int x\cdot\sin^2 x dx;$ $4.\int\cos x\cdot\ln\sin x dx;$

$5.\int\frac{x-5}{\sqrt{-x^2+10x+1}}dx;$ $6.\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx;$ $7.\int\frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)\cdot(x-2)^3}dx;$

$8.\int\frac{x}{(x^2+4)\cdot(x-1)}dx;$ $9.\int\frac{1}{9+\sin x+8\cdot\cos x}dx;$ $10.\int\frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx.$

РОЗДІЛ 7

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

7.1. Означення, властивості, геометричний зміст визначеного інтеграла

До поняття визначеного інтеграла приводять задачі обчислення площ, об'ємів тіл, довжини дуги кривої, фізичні задачі.

Нехай на відрізку $[a,b]$ визначена функція $y=f(x)$. Розіб'ємо відрізок на n частин точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$.

На кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ візьмемо довільну точку ξ_i й складемо суму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, що називається *інтегральною сумою*.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n при $\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$, що не залежить від способу розбивки області на елементарні ділянки й вибору точок ξ_i, то вона називається *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ й позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Функція $f(x)$ у цьому випадку називається інтегровною на відрізку $[a,b]$.

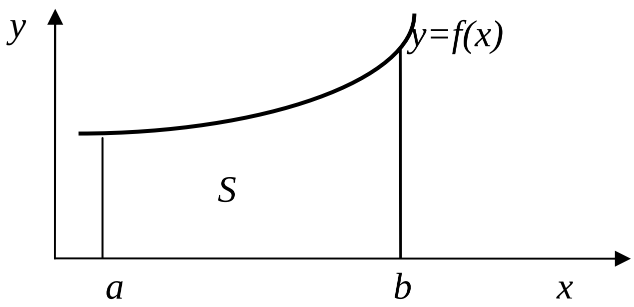


Рис. 7.1

Геометричний зміст визначеного інтеграла: якщо $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції з основою $[a,b]$, обмеженої прямими $x=a$, $x=b$ і кривою $y=f(x)$ (рис. 7.1).

Властивості визначеного інтеграла.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. *Лінійність* інтеграла. Якщо $f(x)$ й $g(x)$ – функції, інтегровні на $[a,b]$, то

а) $\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx,\ (c = const)$; б) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$

Поєднуючи властивості а) і б), можна записати властивість лінійності визначеного інтеграла: $\int\limits_a^b \left(c_1 f(x) + c_2 g(x)\right)dx = c_1\int\limits_a^b f(x)\,dx + c_2\int\limits_a^b g(x)\,dx.$

4. *Адитивность* інтеграла. Якщо $f(x)$ – функція інтегровна на $[a,c]$ й $[c,b]$, де $c \in (a,b)$, то вона інтегровна на *[a,b]* й

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

5. Якщо $a < b$ й $f(x) \ge 0$, те $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$, причому рівність нулю можлива тільки в тому випадку, коли $f(x) \equiv 0, \forall x \in (a,b)$.

6. Якщо $a < b$ й $f(x) \ge g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge \int\limits_a^b g(x)\,dx$– теорема про інтегрування нерівностей.

7. Якщо $f(x)$ – функція, інтегровна на *[a,b]*, то $|f(x)|$ – інтегровна на *[a,b]* і справедлива нерівність:

$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$– теорема про модуль визначеного інтеграла.

8. Теорема про оцінку визначеного інтеграла. Якщо $m \le f(x) \le M$, *m*– найменше, *M* – найбільше значення функції *f(x)* на відрізку *[a; b]*,то

$$m(в - a) \le \int\limits_a^в f(x)dx \le M(в - a).$$

9. Теорема про середнє значення. Якщо $f(x)$ неперервна $\forall x \in [a,b]$, то

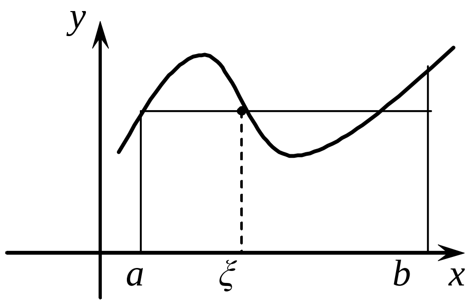


Рис. 7.2

$\exists \xi \in (a,b)$, що $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$

Геометричний зміст теореми: нехай $f(x) \ge 0\quad \forall x \in [a,b]$, тоді існує принаймні одна точка $\xi \in (a,b)$, що площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху неперервною кривою $y = f(x)$ буде рівна площі прямокутника з тією ж основою й висотою, рівною $f(\xi)$ (рис. 7.2). Значення $f(\xi)$ називається середнім значенням функції на відрізку *[a, b]*.

10. Якщо функції $f(x)$ й $\varphi(x)$ – неперервні на *[a, b]*, а $\varphi(x)$ зберігає знак на цьому відрізку, то (узагальнена теорема про середнє):

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad a<\xi<b$$

11. Якщо неперервна функція $f(x)$, $x\in[-l,l]$ – парна, то $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx$.

Якщо $f(x)$ – непарна, то $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.

7.2. Методи обчислення визначеного інтеграла

Фундаментальним результатом математичного аналізу й поворотним моментом у розвитку інтегрального числення з'явилося відкриття зв'язку між визначеним і невизначеним інтегралами. Це дозволило визначені інтеграли обчислювати не як границі інтегральних сум, а через невизначені інтеграли.

Теорема. *Похідна визначеного інтеграла від неперервної функції по його верхній межі існує й дорівнює значенню підінтегральної функції у верхній межі, тобто*

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Наприклад, а) $\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}dt\right)'_x = e^{-x^2}$; б) $\left(\int\limits_x^0 \sqrt{\sin^3 t}\,dt\right)'_x = \left(-\int\limits_0^x \sqrt{\sin^3 t}\,dt\right)'_x = -\sqrt{\sin^3 x}$.

Формула Ньютона-Лейбніца: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ – основна формула інтегрального числення, що встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами й дозволяє знаходити значення визначеного інтеграла як різницю значень первісної на верхній і нижній межах визначеного інтеграла.

Приклади.

Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int\limits_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin\ln x\Big|_1^e = \arcsin\ln e - \arcsin\ln 1 =$

$\arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$

2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin^2 x)d(\sin x)}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} (\sin x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x) - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin^{\frac{5}{3}} x d(\sin x) =$

$\left(\frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{8}\sin^{\frac{8}{3}} x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}\left(\sin^{\frac{2}{3}}(-\frac{\pi}{4}) - \sin^{\frac{2}{3}}(-\frac{\pi}{2})\right) - \frac{3}{8}\left(\sin^{\frac{8}{3}}(-\frac{\pi}{4}) - \sin^{\frac{8}{3}}(-\frac{\pi}{2})\right) =$

$$\frac{3}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right)-\frac{3}{8}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{8}{3}}-1\right)=-\frac{9}{8}+\frac{21}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

3. $$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{2tg^2x+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_9^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sqrt{2}\cdot tgx)}{(\sqrt{2}\cdot tgx)^2+1}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}\cdot tgx)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(arctg(\sqrt{2}\cdot tg\frac{\pi}{4}-arctg0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\sqrt{2}.$$

4. $$\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{d(x+1)}{\sqrt{-(x+1)^2+2^2}}=\arcsin\frac{x+1}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{3}-1}=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}.$$

5. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cos\,x-cos^3 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cos\,x\left(1-cos^2 x\right)}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|sin\,x|(cos\,x)^{1/2}dx=$$

Скористаємося парністю підінтегральної функції.

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos x)^{1/2}dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{1/2}d(\cos x)=-2\cdot\frac{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}.$$

6. Обчислити середнє значення функції

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\quad \text{на відрізку } \left[0;\frac{1}{2}\right].$$

Розв'язання. Середнє значення функції за теоремою про середнє дорівнює:

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,\ \text{ãäå}\ b-a=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{1-x}d\left(\frac{1}{1-x}\right)=\sin\frac{\pi}{1-x}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\sin 2\pi-\sin\pi=0.$$

Отже, середнє значення функції дорівнює

$$f(\xi)=\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot 0=0.$$

7. Оцінити інтеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx$.

Точне значення інтеграла в цьому випадку знайти не можна, тому що первісна не виражається через елементарні функції.

Для дослідження поведінки підінтегральної функції $f(x)=\dfrac{sin\,x}{x}$ на відрізку $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$ знаходимо її похідну:

$$f'(x)=\frac{x\,cos\,x-sin\,x}{x^2}=\left\|x<tgx,\ x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]\right\|=\frac{(x-tgx)cos\,x}{x^2}<0$$

Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{sin\,x}{x}$ спадає на відрізку $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$, тому що її похідна $f'(x)<0.$.

Найменше значення функції $m=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}$, а найбільше значення функції $M=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

$\forall x\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$ має місце нерівність: $\dfrac{2}{\pi}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Скориставшись теоремою про оцінку інтеграла, одержимо:

$$\frac{1}{2}\le\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

8. Оцінити абсолютну величину інтеграла $\int\limits_{10}^{19}\dfrac{\sin x}{1+x^8}dx$.

Оскільки $|sin\,x|\le 1$, то при $x>10$ виконується нерівність $\left|\dfrac{sin\,x}{1+x^8}\right|\le 10^{-8}$.

Використовуючи властивість 7, одержимо :

$$\left|\int\limits_{10}^{19}\frac{sin\,x}{1+x^8}dx\right|<\int\limits_{10}^{19}\left|\frac{sin\,x}{1+x^8}\right|dx<(19-10)10^{-8}<10^{-7}.$$

Заміна змінної в визначеному інтегралі

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, а функція $x=\varphi(t)$ – монотонна й має неперервну похідну на відрізку $[\alpha,\beta]$, де $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, тоді має місце формула заміни змінної в визначеному інтегралі $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Зауваження. Заміну змінної інтегрування звичайно роблять за допомогою монотонних неперервних функцій, тому що монотонність гарантує однозначність як прямої, так і оберненої функції. При цьому, якщо змінна t змінюється в проміжку *[$\alpha;\beta$],* значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі проміжку *[a, b]*.

Відзначимо, що до інтегралів виду $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ застосовна підстановка *x-α=1/t* (підстановка приводить до менш громіздких викладень, ніж тригонометричні підстановки).

Приклад 1. Обчислити інтеграл. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

1-й спосіб: застосуємо підстановку *x=1/t.* Знайдемо межі інтегрування для змінної *t* . Маємо *t=1/x,* тоді при *x=1* змінна t приймає значення, рівне 1 (нижня межа інтегрування). При *x=2* змінна *t* дорівнює *1/2* (верхня межа інтегрування). Таким чином, при зміні змінної *x* від *1* до *2* змінна *t,* монотонно спадаючи, змінюється від *1* до *½.* Функція *x=1/ t* – монотонна й неперервно диференцційовна функція на відрізку *[1/2;1]*. Отже,

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\left\|\begin{array}{l} x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}, \\ x=1 \Rightarrow t=1, \\ x=2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}. \end{array}\right\| = -\int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\ .$$

2-й спосіб:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int\limits_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin 1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

3-й спосіб:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\left\|\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sin t},\ dx=-\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}; \\ \sqrt{x^2-1}=\frac{\cos t}{\sin t};\ x=1\Rightarrow \\ \sin t=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2};\ x=2\Rightarrow \\ \sin t=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}. \end{array}\right\| = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin t\cdot\frac{\sin t\cdot\cos t dt}{\sin^2 t\cdot\cos t} = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dt = t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Заміна: $x = a\sin t$. Визначимо межі інтегрування для змінної t. Нехай $x=0$, тобто беремо *x* рівним нижній межі інтегрування у вихідному інтегралі. Тоді в якості *t* можна взяти будь-який розв'язок рівняння

$a\sin t=0$, наприклад $t=0$. При знаходженні верхньої межі для змінної t замість x підставляємо верхню межу інтегрування, рівну a, і розв'язуємо рівняння $a=a\sin t$, звідки $\sin t=1$, $t=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in z$, тобто рівняння має нескінченну множину розв'язків. При цьому, взявши розв'язок $t=\frac{\pi}{2}$, (при $n=0$), ми одержимо, що при зміні t від 0 до $\frac{\pi}{2}$ змінна x буде монотонно змінюватися від 0 до a. Таким чином,

$$I=\left|\begin{matrix}x=a\sin t,\\ dx=a\cos t dt\\ x=0,\ t=0\\ x=a,\ t=\pi/2\end{matrix}\right|=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t dt=a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt=$$

$$=a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}dx$.

Функція $\sqrt{1-e^{2x}}$ — неперервна й монотонна на проміжку *[-ln2;0]*. Вважаючи $t=\sqrt{1-e^{2x}}$, знаходимо межі інтегрування для змінної *t*. При *x=0* одержимо: *t=0*; при *x=-ln2* знаходимо: $t=\sqrt{1-e^{-2\ln 2}}=\sqrt{1-e^{-\ln 4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Очевидно, обернена функція, рівна $x=\frac{\ln\left(1-t^2\right)}{2}$ – неперервно диференційовна на проміжку $0<t<\frac{\sqrt{3}}{2}$, тоді

$$I=\int_0^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}dx=\left\|\begin{matrix}1-e^{2x}=t^2, -2e^{2x}dx=2tdt,\\ dx=\frac{-tdt}{e^{2x}}=\frac{tdt}{t^2-1}\end{matrix}\right\|=$$

$$I=\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

3. При обчисленні інтеграла $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+cos\,x}$, застосовуючи підстановку $t = tg\frac{x}{2}$, знаходимо нижню межу інтегрування $t = tg0 = 0$, верхня межа $t = tg\pi = 0$. Тоді

$$I = 2\int_0^0 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int_0^0 \frac{dt}{t^2+3} = 0,$$

що неможливо, тому що підінтегральна функція $\frac{1}{2+cos\,x} > 0$. Пояснюється це тим, що функція $tg\frac{x}{2}$ в точці $x = \pi \in [0, 2\pi]$ терпить розрив й, отже, не має неперервної похідної. Підстановка $t = tg\frac{x}{2}$ незастосовна на проміжку $[0, 2\pi]$. Наведений інтеграл може бути обчислений у такий спосіб.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+cos\,x} = \left\| \begin{matrix} x-\pi = t \\ 0 \to -\pi \\ 2\pi \to \pi \end{matrix} \right\| = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2-cos\,t} = 2\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+2\,sin^2\frac{t}{2}} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{sin^2\frac{t}{2}\left(\frac{1}{2\,sin^2\frac{t}{2}}+1\right)} =$$

$$= -2\int_0^{\pi} \frac{d\,ctg\frac{t}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}ctg^2\frac{t}{2}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{ctg\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Відзначимо, *що на відміну від заміни змінної в невизначеному інтегралі, у визначеному інтегралі не потрібно виконувати обернену підстановку, тобто переходити у відповіді до старої змінної.*

При використанні формули заміни змінної в визначеному інтегралі необхідно перевіряти виконання умов:

1) Функція $x = \varphi(t)$ – неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha, \beta]$ або $[\beta, \alpha]$ ($\alpha \geq \beta$ або $\alpha \leq \beta$) осі ot.
2) При зміні t від α до β значення функції $x = \varphi(t)$ не виходять за межі відрізка $[a, b]$.
3) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$.

Приклад 4. При обчисленні інтеграла $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x}$

формальне застосування формули заміни змінної інтегрування приводить до наступного результату:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+tg^2 x}\left\|\begin{array}{l} t=tgx \\ x=0\Rightarrow t=0 \\ x=\pi\Rightarrow t=0 \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{array}\right\|=\int_0^0\frac{dt}{1+t^2}=0.$$

З іншого боку, $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^{\pi}dx=x\Big|_0^{\pi}=\pi$

У цьому випадку перераховані умови застосовності формули заміни змінної порушуються, тому що функція $t=tgx$ в точці $x=\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$ терпить розрив й, отже, не має неперервної похідної. Підстановка $t=tgx$ незастосовна на проміжку $[0;\pi]$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^9-3x^7+4x^5-2x^3+x+2}{\cos^2 x}dx$

Розв'язання. Представимо інтеграл у вигляді суми двох інтегралів, тоді

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^9-3x^7+4x^5-2x^3+x}{\cos^2 x}dx+2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Скористаємося властивістю (11) визначених інтегралів, тоді, оскільки функція $\frac{x^9-3x^7+4x^5-2x^3+x}{\cos^2 x}$ непарна, як частка непарної й парної функції, а проміжок інтегрування симетричний відносно початку координат, перший інтеграл дорівнює нулю. Тоді, в силу парності функції $\frac{1}{\cos^2 x}$,

$$I=2\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=4tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4\left(tg\frac{\pi}{4}-tg0\right)=4.$$

Приклад 6. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}$

Застосуємо підстановку $t=tgx$, тоді $x=arctgt$ – монотонна, неперервно диференційовна функція.

При $x=\frac{\pi}{4}$ одержимо $t=1$, при $x=\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $t=\sqrt{3}$, тобто $1\le t\le\sqrt{3}$; $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

$$I=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{(1+t^2)\sqrt[4]{\frac{t^3}{(1+t^2)^4}}}=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^{3/4}}=\int\limits_1^{\sqrt{3}}t^{-\frac{3}{4}}dt==4t^{\frac{1}{4}}\Big|_1^{\sqrt{3}}=4\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right)=4\left(\sqrt[8]{3}-1\right)$$

Приклад 7. $I=\int\limits_{1}^{4,5}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{2x-1}}$.

Скористаємося заміною: $\sqrt[3]{2x-1}=t$. Визначимо новий проміжок інтегрування. Якщо $x=1$, то $t=1$; якщо $x=4{,}5$, те $t=\sqrt[3]{8}=2$. Отже, $2x-1=t^3$, $2dx=3t^2dt$, $dx=3/2t^2dt$.

$$I=\frac{3}{2}\int\limits_{1}^{2}\frac{t^2dt}{1+t}=\frac{3}{2}\int\limits_{1}^{2}\frac{(t^2-1)}{1+t}dt=\frac{3}{2}\left(\int\limits_{1}^{2}(t-1)dt+\int\limits_{1}^{2}\frac{dt}{1+t}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{(t-1)^2}{2}+\ln(1+t)\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\ln 3-\ln 2\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\right).$$

Формула інтегрування по частинах: $\int\limits_a^b u\cdot dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\cdot du$.

Приклади.

1. $I=\int\limits_1^2 x\log_2 xdx$.

Покладаємо $u=\log_2 x$, тоді $du=\frac{dx}{x\ln 2}$, $dv=xdx$, $v=\frac{x^2}{2}$.

Отже,

$$I=\log_2 x\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2-\frac{1}{2}\int\limits_1^2 x^2\cdot\frac{dx}{x\ln 2}=\log_2 2\cdot 2-\log_2 1\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2\ln 2}\int\limits_1^2 xdx=2-\frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2=$$

$$2-\frac{1}{2\ln 2}\cdot 2+\frac{1}{4\ln 2}=2-\frac{3}{4\ln 2}.$$

2. $I=\int\limits_0^3 x\cdot arctgxdx$.

Покладаємо $u=arctgx$, тоді $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $dv=xdx$, $v=\frac{x^2}{2}$, тоді:

$$I=arctgx\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3-\frac{1}{2}\int\limits_0^3\frac{x^2dx}{1+x^2}=\frac{9}{2}arctg3-\frac{1}{2}\int\limits_0^3\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=\frac{9}{2arctg3}-\frac{1}{2}(x-arctgx)\Bigg|_0^3$$

$$=\frac{9}{2}arctg3-\frac{1}{2}(3-arctg3)=5arctg3-\frac{3}{2}.$$

3. Обчислити інтеграл: $I_n=\int\limits_0^{\pi/2}sin^n xdx$.

Нехай $u=sin^{n-1}x$, тоді $du=(n-1)sin^{n-2}x\cos xdx$, $dv=sinx\ dx$, $v=-cosx$.

$$I_n=-\cos x sin^n x\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int\limits_0^{\pi/2}sin^{n-2}x\left(1-sin^2 x\right)dx=(n-1)\int\limits_0^{\pi/2}sin^{n-2}xdx-$$

$$-(n-1)I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.$$

Отже, $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. Отримане рекурентне співвідношення дозволяє для будь-якого натурального n одержати значення інтеграла

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)...3\cdot 1}{2k(2k-2)...2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}, \text{ де } I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

При $n=2k+1$ знаходимо

$$I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)...2}{(2k-1)(2k-3)...3\cdot 1} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \text{ де } I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1.$$

Крім того, $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ (що очевидно з геометричних міркувань і можна перевірити заміною $t = \frac{\pi}{2} - x$).

Таким чином,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } n - \text{парне} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{якщо } n - \text{непарне} \end{cases}.$$

Наприклад, $I_6 = \int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx = \frac{5!!}{6!!}\frac{\pi}{2} = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$.

7.3. Геометричні застосування визначених інтегралів

Обчислення площ, об'ємів, довжин дуг

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою $y = f(x)$, прямими: $x = a$, $x = b$, $(a<b)$ $y = 0$ і $f(x) \geq 0$, то її площа

$$S = \int_a^b f(x) dx \qquad (7.3.1).$$

Якщо $f_1(x) \leq f_2(x)$, то площа, обмежена цими кривими й прямими $x = a$ й $x = b$ дорівнює $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$.

Об'єм тіла обертання, отриманого при обертанні криволінійної трапеції, обмеженою зверху кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ навколо осі *OX*, знаходиться за формулою.

$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2 dx$, при обертанні навколо осі *OY*: $V_{oy} = 2\pi \int_a^b xy dx$.

Об'єм тіла, отриманого при обертанні фігури, обмеженої лініями $y = y_2(x)$ й $y = y_1(x)$ $(y_1 \leq y_2)$, дорівнює

$$V_{ox} = \pi \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2 \right) dx, \quad V_{oy} = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx.$$

Довжина дуги кривої у декартових координатах:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx \quad (a<b).$$

Випадок параметричного задання кривої.

Якщо крива задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

причому точці *A* відповідає значення параметра $t=\alpha$, точці *B* – значення $t=\beta$.

Коли t змінюється від α до β, то точка описує криву *AB* (рис. 7.3).

При цьому $a=x(\alpha)$, $b=x(\beta)$, де a й b – абсциси точок *A* и *B*. Виконуючи змінної в інтегралі (7.2.1), одержимо

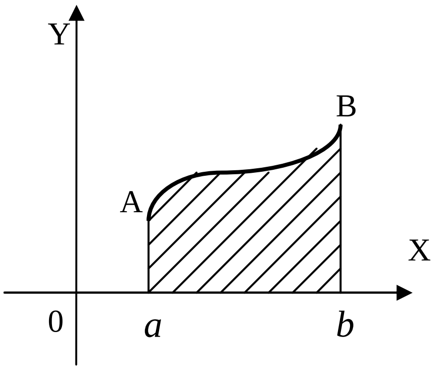


Рис. 7.3

заміну $S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$ – площа у випадку параметричного задання кривої.

Довжина дуги AB, заданої параметричними рівняннями:

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt \quad (\alpha<\beta).$$

Площа в полярних координатах.

Якщо крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$,
то площа криволінійного сектора *AOB* (рис. 7.4), обмеженого
дугою кривої і двома полярними радіусами *OA* й *OB*, відповідним значенням кута α і β $(\alpha<\beta)$, виразиться інтегралом $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Довжина дуги *AB* у полярних координатах:

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

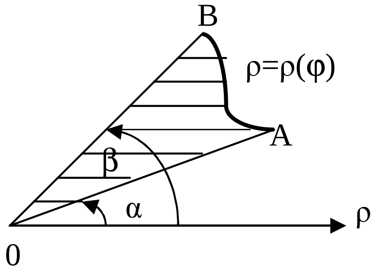


рис.7.4

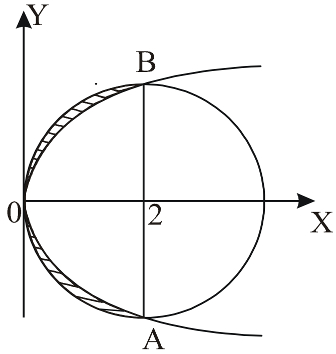


Рис.7.5

Приклад 1. Знайти площі двох фігур, обмежених параболою $y^2=2x$ й колом $y^2=4x-x^2$ (Рис.7.5).

Розв'язання. Знайдемо центр і радіус кола, виділивши повний квадрат: $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$.

Отже, центр кола має координати *(2;0)*, $R = 2$.

Знайдемо точки перетину кривих розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y^2 = 4x - x^2, \\ y^2 = 2x. \end{cases}$

Тоді 0*(0;0)*, *A(2;-2)*, *B(2;2)* – точки перетину.

Площа заштрихованої частини дорівнює

$$S = 2\int_0^2 \left(\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x}\right) = 2\left(\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\,dx - \sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}\,dx\right)$$

Перший інтеграл у правій частині рівності дорівнює $\frac{1}{4}$ площі круга, тобто π, виходить, $S = 2\left(\pi - \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\Big|_0^2\right) = 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right)$.

Площа незаштрихованої частини дорівнює

$$S_1 = \pi R^2 - S = 4\pi - 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right) = 2\left(\pi + \frac{8}{3}\right).$$

Приклад2. Обчислити площу кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Тому що крива симетрична щодо полярної осі, обчислимо площу верхньої половини, при цьому кут φ змінюється від 0 до π (Рис.7.6).

Застосуємо формулу: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Площа дорівнює

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^\pi (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Приклад 3. Знайти довжину астроїди: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

I спосіб $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx$.

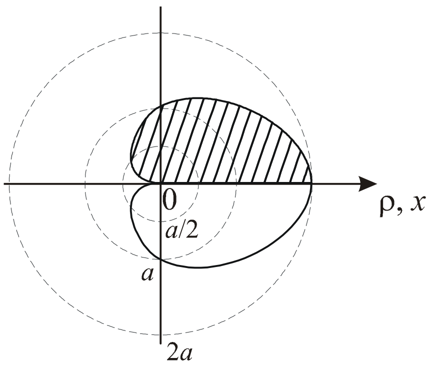


Рис.7.6

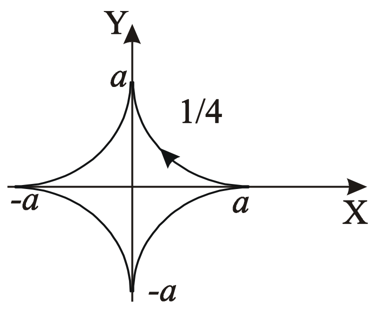


Рис.7.7

Диференціюючи рівняння астроїди, одержимо $\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}y'_x=0 \Rightarrow y'_x=\frac{-y^{1/3}}{x^{1/3}}$

Крива симетрична щодо обох координатних осей, тому обчислюємо довжину дуги однієї чверті астроїди (Рис.7.7):

$$\frac{1}{4}l=\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=\int_0^a\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}dx=\frac{3a^{1/3}x^{2/3}}{2}\Big|_0^a=\frac{3a}{2}\Rightarrow l=6a\,.$$

II спосіб. Використаємо параметричні рівняння астроїди

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}\quad (0\le y\le 2\pi)$$

Для чверті довжини астроїди, параметр t змінюється від $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$.

Використаємо формулу

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt\,.$$

Знаходимо $x_t'^2+y_t'^2=\left(3a\cos^2 t\left(-\sin t\right)\right)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2=$

$$=9\mathrm{a}^2(\cos^4 \mathrm{t}\sin^2 \mathrm{t}+\sin^4 \mathrm{t}\cos^2 \mathrm{t})=9\mathrm{a}^2\cos^2 \mathrm{t}\sin^2 \mathrm{t}(\cos^2 \mathrm{t}+\sin^2 \mathrm{t})=9\mathrm{a}^2\cos^2 \mathrm{t}\sin^2 \mathrm{t}$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{l}=3\mathrm{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 \mathrm{t}\sin^2 \mathrm{t}}\,\mathrm{dt}=3\mathrm{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos \mathrm{t}\sin \mathrm{t}\,\mathrm{dt}\;=\;3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t d(\sin t)=3a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{2}-\sin^2 0\right)=$$

$$=\frac{3a}{2}\Rightarrow l=6a\,.$$

Приклад4. Обчислити площу, обмежену віссю абсцис й однією аркою циклоїди

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$$

Використаємо формулу:

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt\,.$$

Знаходимо $x'(t)=a(1-\cos t)$, тоді

$$S=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$a^2\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi-2\sin 2\pi+\frac{\sin 4\pi}{2}\right)=3\pi a^2\,.$$

Приклад5. Обчислити об'єм кулі радіуса R з центром на початку координат.

Кулю одержимо обертанням навколо осі OX півкола $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

$$V_{ox}=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=2\pi\int_0^R(R^2-x^2)dx=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3(од^3)$$

Контрольні завдання до розділу 7

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли.

7.1.1. $\int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^3}$ 7.1.2. $\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4}dx$ 7.1.3. $\int_0^{\pi/4} \frac{2\cos x+3\sin x}{(3\cos x-2\sin x)^3}dx$

7.1.4. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-2/x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 7.1.5. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2arctgx+x}{1+x^2}dx$ 7.1.6. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$

7.1.7. $\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$ 7.1.8. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$ 7.1.9. $\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$

7.1.10. $\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx$ 7.1.11. $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{4+\ln(x-1)}{x-1}dx$ 7.1.12. $\int_0^1 \frac{3arctgx+x}{x^2+1}dx$

7.1.13. $\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$ 7.1.14. $\int_0^{1/2} \frac{8x+arctg2x}{4x^2+1}dx$ 7.1.15. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$

7.1.16. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 7.1.17. $\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2-2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 7.1.18. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

7.1.19. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$ 7.1.20. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 7.1.21. $\int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$

7.1.22. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x+arctg^3x}{1+x^2}dx$ 7.1.23. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$ 7.1.24. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x+x\cos x}{(x\sin x)^2}dx$

7.1.25. $\int_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$ 7.1.26. $\int_{-1}^0 \frac{tg^2(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$ 7.1.27. $\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$

7.1.28. $\int_0^{1/2} \frac{x-arctg2x}{1+4x^2}dx$ 7.1.29. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^4}dx$ 7.1.30. $\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$

Завдання 2. Обчислити визначені інтеграли.

7.2.1. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$ 7.2.2. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$ 7.2.3. $\int_0^2 \frac{dx}{(16-x^2)^{3/2}}$

7.2.4. $\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$ 7.2.5. $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$ 7.2.6. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$

7.2.7. $\int_0^{9/2} \frac{x^2}{\sqrt{81-x^2}}dx$ 7.2.8. $\int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$ 7.2.9. $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$

7.2.10. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$ 7.2.11. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$ 7.2.12. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}$

7.2.13. $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$ 7.2.14. $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$ 7.2.15. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}$

7.2.16. $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\left(5-x^2\right)^{3/2}}$ 7.2.17. $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^4}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx$ 7.2.18. $\int\limits_0^1 \frac{x^4dx}{\left(2-x^2\right)^{3/2}}$

7.2.19. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}dx$ 7.2.20. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}dx$ 7.2.21. $\int\limits_0^7 x^2\sqrt{49-x^2}dx$

7.2.22. $\int\limits_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(64-x^2\right)^{3/2}}$ 7.2.23. $\int\limits_0^{4/\sqrt{2}} \frac{x^4dx}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}$ 7.2.24. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

7.2.25. $\int\limits_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{\left(8-x^2\right)^3}}dx$ 7.2.26. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$ 7.2.27. $\int\limits_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$

7.2.28. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$ 7.2.29. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 7.2.30. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$

Завдання 3. Обчислити площі фігур, обмежених указаними лініями.

7.3.1. $x=\frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, y=e^3, y=1, x=0$; 7.3.2. $y=\frac{1}{x^2}e^{1/x}, y=0, x=1, x=2$;

7.3.3. $y=x^2\sqrt{16-x^2}, (0\le x\le 4), y=0$; 7.3.4. $x=\sqrt{4-y^2}, x=0, y=0, y=1$;

7.3.5. $y=x^2\cos x, x=0, y=0, x=\pi/2$; 7.3.6. $x=4-(y-1)^2, x=y^2-4y+3$;

7.3.7. $y=x\sqrt{9-x^2}, (0\le x\le 3), y=0$; 7.3.8. $y=\sin x\cos^2 x, (0\le x\le \pi/2), y=0$;

7.3.9. $y=x^2\sqrt{4-x^2}, (0\le x\le 2), y=0$; 7.3.10. $y=\sqrt{e^x-1}, x=\ln 2, y=0$;

7.3.11. $y=\arccos x, x=0, y=0$; 7.3.12. $y=2x-x^2+3, y=x^2-4x+3$;

7.3.13. $x=\arccos y, x=0, y=0$; 7.3.14. $y=x^2\sqrt{8-x^2}, \left(0\le x\le 2\sqrt{2}\right), y=0$;

7.3.15. $y=x\sqrt{1-x^2}, (0\le x\le 1), y=0$; 7.3.16. $x=4-y^2, x=y^2-2y$;

7.3.17. $y=\frac{1}{1+\cos x}, x=-\pi/2, x=\pi/2, y=0$; 7.3.18. $y=4-x^2, y=x^2-2x$;

7.3.19. $y=\sin 2x\cos^3 x, (0\le x\le \pi/2), y=0$; 7.3.20. $y=(x-2)^3, y=4x-8$;

7.3.21. $y=\sqrt{4-x^2}, (0\le x\le 1), y=0$; 7.3.22. $y=(x+1)^2, y^2=x+1$;

7.3.23. $y=\sin x\cos^2 x, (0\le x\le \pi/2), y=0$; 7.3.24. $x=\sqrt{e^y-1}, x=0, y=\ln 2$;

7.3.25. $y=2x-x^2+3, y=x^2-4x+3$; 7.3.26. $y=\frac{x}{1+\sqrt{x}}, x=1, y=0$;

7.3.27. $y = x\sqrt{49 - x^2}, (0 \le x \le 7), y = 0$; 7.3.28. $y = x\,arctgx, x = \sqrt{3}, y = 0$;

7.3.29. $x = (y-2)^3, x = 4y - 8$; 7.3.30. $y = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}, x = 1, y = 0$;

Завдання 4. Обчислити довжини дуг кривих, заданих рівняннями в прямокутних координатах.

7.4.1. $y = ln\dfrac{5}{2x}, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

7.4.2. $y = e^x + 6, \quad ln\sqrt{8} \le x \le ln\sqrt{15}$

7.4.3. $y = 1 - ln\cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

7.4.4. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \le x \le \dfrac{7}{9}$

7.4.5. $y = ln(x^2 - 1), \quad 2 \le x \le 3$

7.4.6. $y = -ln\cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

7.4.7. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le x \le \dfrac{15}{16}$

7.4.8. $y = 2 + chx, \quad 0 \le x \le 1$

7.4.9. $y = ln(1 - x^2), \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{4}$

7.4.10. $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad \dfrac{1}{4} \le x \le 1$

7.4.11. $y = 1 - ln(x^2 - 1), \quad 3 \le x \le 4$

7.4.12. $y = (1 - e^x - e^{-x})/2, \quad 0 \le x \le 3$

7.4.13. $y = 4 + \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2}, \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{2}$

7.4.14. $y = e^x + e, \quad ln\sqrt{3} \le x \le ln\sqrt{15}$

7.4.15. $y = ln\dfrac{7}{4} - ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

7.4.16. $y = 2 + ln\cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

7.4.17. $y = (e^{2x} + e^{-2x} + 3)/4, \quad 0 \le x \le 2$

7.4.18. $y = 3 + chx, \quad 0 \le x \le 1$

7.4.19. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le x \le \dfrac{3}{4}$

7.4.20. $y = e^x + 7, \quad ln\sqrt{8} \le x \le ln\sqrt{24}$

7.4.21. $y = ln\sin x, \quad \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

7.4.22. $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 2, \quad 0 \le x \le \dfrac{9}{16}$

7.4.23. $y = -\arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 5, \quad \dfrac{1}{9} \le x \le 1$

7.4.24. $y = 1 - ln\sin x, \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

7.4.25. $y = e^x - 2, \quad ln\sqrt{3} \le x \le ln\sqrt{8}$

7.4.26. $y = ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$

7.4.27. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{ln x}{2}, \quad 1 \le x \le 2$

7.4.28. $y = 6 - e^x, ln\sqrt{8} \le x \le ln\sqrt{15}$

7.4.29. $y = 3 + (e^x + e^{-x})/2, \quad 0 \le x \le 2$

7.4.30. $y = 1 - ln\cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$